Fonctions et convexité

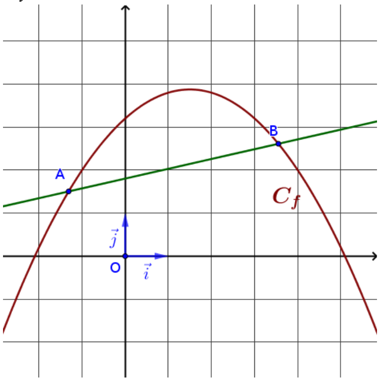
I Convexité d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

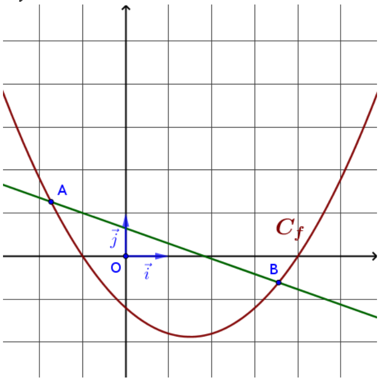
Définition : Pour deux points A et B appartenant à $\mathcal{C}_f$, la droite (AB) est appelée sécante de $\mathcal{C}_f$.

Illustration : Localement, entre A et B, trois cas sont possibles :

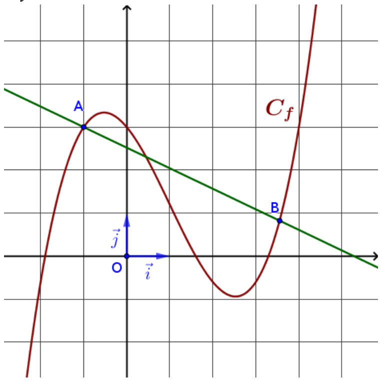
$\mathcal{C}_f$ est au dessus de la sécante.



$\mathcal{C}_f$ est en dessous de la sécante.



$\mathcal{C}_f$ traverse la sécante.



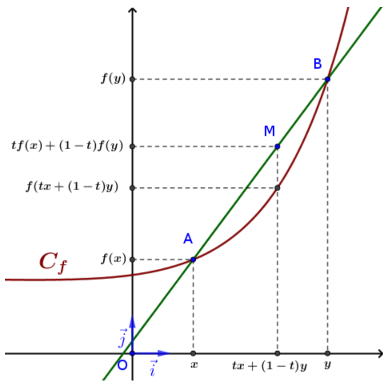
Définitions :

- f est convexe sur I si $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses sécantes entre les points d'intersection.
- f est concave sur I si $\mathcal{C}_f$ est au dessus de chacune de ses sécantes entre les points d'intersection.

Exercice 1 : Conjecturer la convexité des fonctions e^x, $\sqrt{x}$, x^2 et $\dfrac{1}{x}$.

Propriétés : Inégalités caractérisant la convexité.

- f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$ et $y \in I$, quel que soit $t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.
- f est concave sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$ et $y \in I$, quel que soit $t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.



Propriété : Relation entre concavité et convexité

f est convexe sur I si, et seulement si, $-f$ est concave sur I.

Exemple : Puisque e^x est convexe sur $\mathbb{R}$ alors $-\mathrm{e}^x$ est concave sur $\mathbb{R}$.

II Convexité et dérivées

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Théorème :

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est décroissante sur I.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 9$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 3(x-3)^2$.
2) En déduire les variations de f' et la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

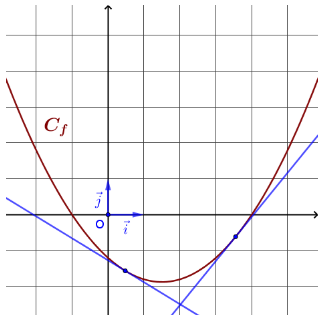
Démonstration 1

Exercice 3 : À propos de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 9$.

1) Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$.
2) Étudier le signe de $f''(x)$ et retrouver la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

III Convexité et tangentes

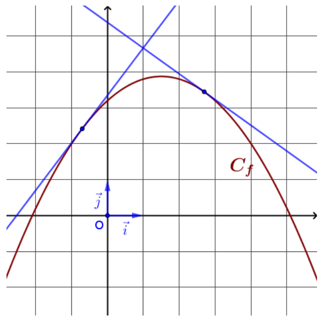
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.



Propriétés :

- Si f est convexe sur I alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
- Si f est concave sur I alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes.

Démonstration 2



Corollaire : Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I.

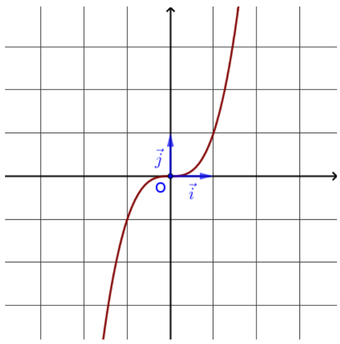
- Si f'' est positive sur I alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
- Si f'' est négative sur I alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes.

Démonstration 3

IV Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Définition : Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.
A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\mathcal{C}_f$ traverse T_A au point A.



Remarque : Cette situation correspond à un changement de convexité de f au point d'inflexion. La fonction f passe de convexe à concave ou inversement.

Exemple : L'origine du repère est le seul point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I et $a \in I$.

$\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse a si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a.

Démonstration 4

Exercice 4 : Montrer que la courbe représentative de la fonction $f(x) = xe^x$ admet un point d'inflexion d'abscisse -2.