Fonctions et limites

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.

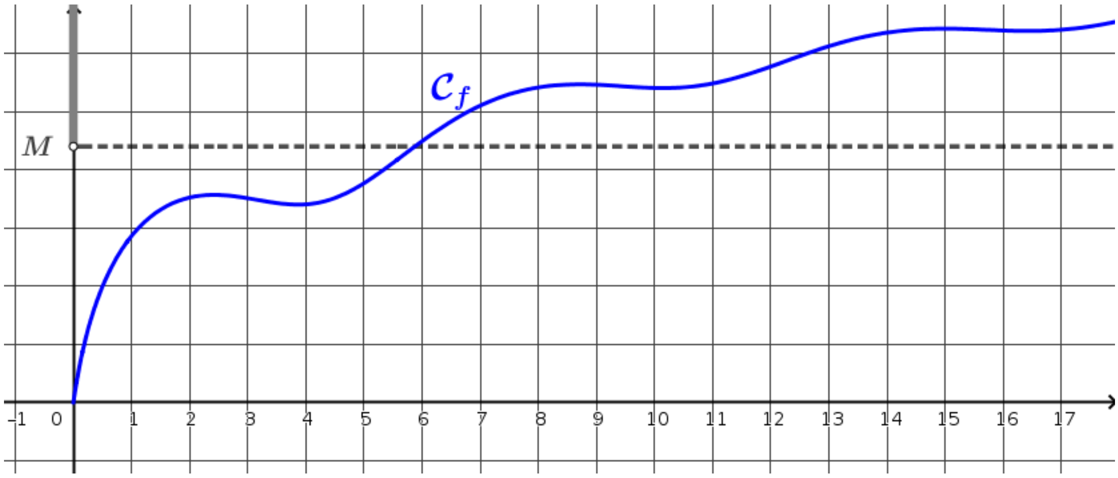
a, ℓ et M désignent des nombres réels.

I Limite infinie en l'infini

Définition : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.

Si tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f, lorsque x devient "suffisamment grand", alors on écrit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

Autrement dit, pour tout $M>0$, il existe $m>a$ tel que, si $x>m$, alors $f(x)>M$.

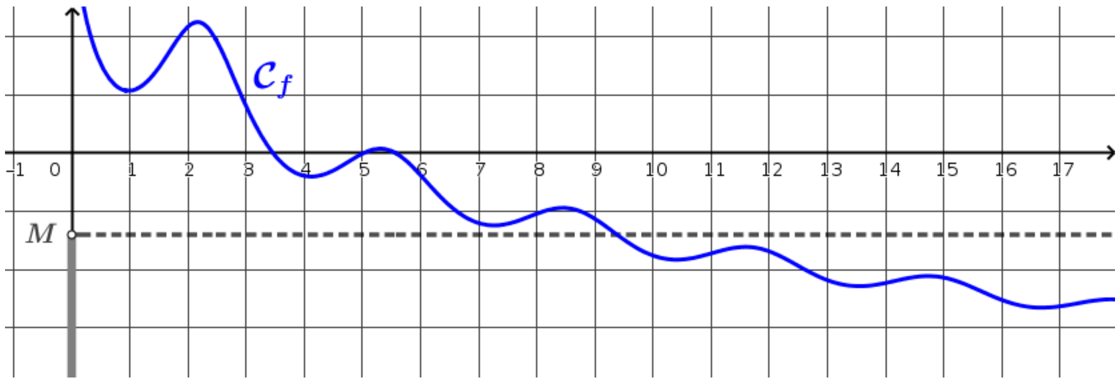


Propriétés : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

Définition : De manière analogue, soit f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.

Si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;M[$ contient toutes les valeurs de f, lorsque devient "suffisamment grand", alors on écrit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

Autrement dit, pour tout $M<0$, il existe $m>a$ tel que, si $x>m$, alors $f(x)<M$.



Exercice 1 : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;a[$.

De manière analogue, définir et illustrer $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

Propriété : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\ldots$

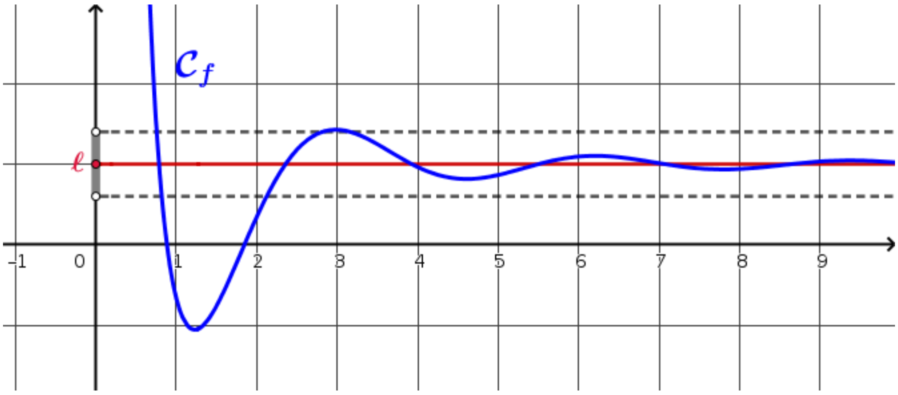
II Limite finie en l'infini et asymptote horizontale

Définition : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.

Si tout intervalle ouvert, contenant ℓ, contient toutes les valeurs de f, lorsque x devient "suffisamment grand", alors on écrit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell}$.

Autrement dit, pour tout $\epsilon>0$, il existe $m>a$ tel que, si $x>m$, alors $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

La droite d'équation $y=\ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.



Propriétés : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

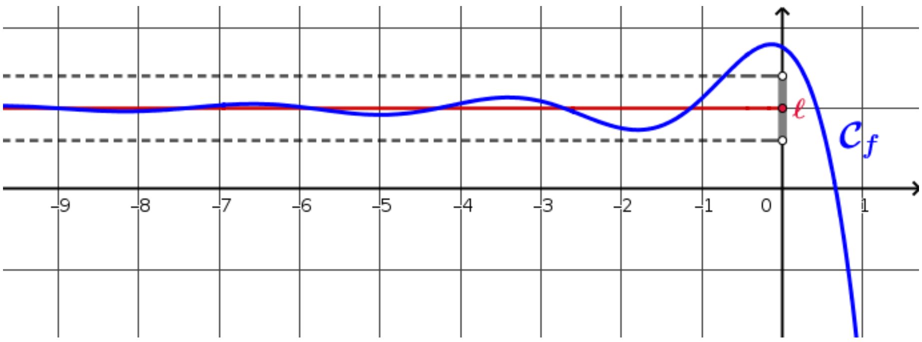
L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale aux courbes représentatives de ces fonctions en $+\infty$.

Définition : De manière analogue, soit f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;a[$.

Si tout intervalle ouvert, contenant ℓ, contient toutes les valeurs de f, lorsque x devient "suffisamment petit", alors on écrit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell}$.

Autrement dit, pour tout $\epsilon>0$, il existe $m<a$ tel que, si $x<m$, alors $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

La droite d'équation $y=\ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.



Propriétés : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale aux courbes représentatives de ces fonctions en $-\infty$.

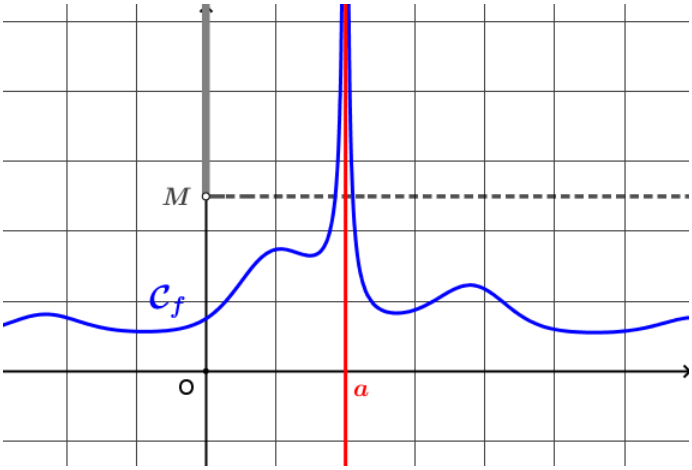
III Limite infinie en un réel et asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]a-\eta\,;a[$ ou $]a\,;a+\eta[$ avec $\eta > 0$.

Si tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f, lorsque x devient "suffisamment proche" de a, alors on écrit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$.

Autrement dit, pour tout $M > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x-a| < \delta$, alors $f(x) > M$.

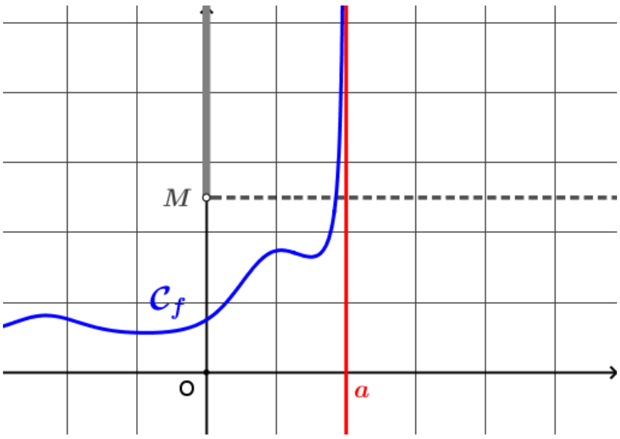
La droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

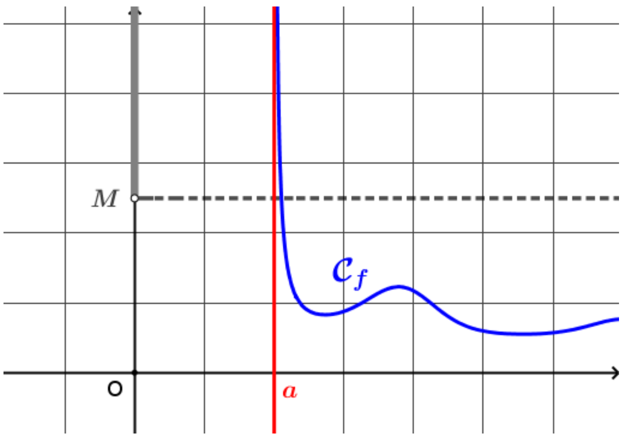


Propriétés : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est pair alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale aux courbes représentatives de ces fonctions.

Remarque : Cette limite infinie peut n'exister qu'à gauche ou à droite de a. Dans ce cas, on parlera de limite à gauche ou à droite de a et on notera respectivement $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty}$.





Exercice 2 : De manière analogue, définir et illustrer $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty}$.

Propriétés : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

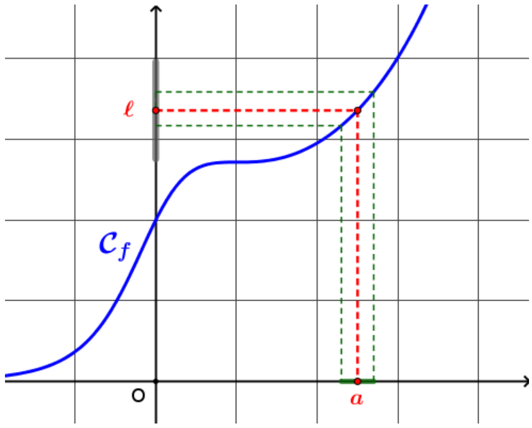
L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale aux courbes représentatives de ces fonctions.

IV Limite finie en un réel

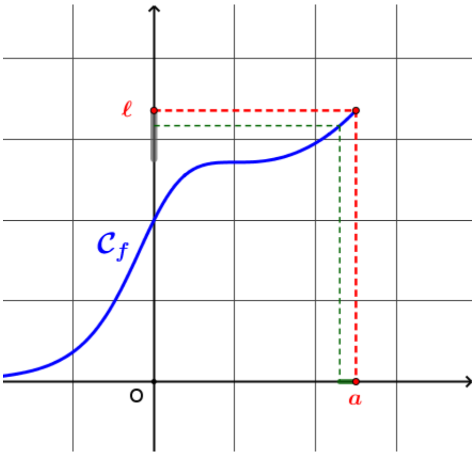
Définition : Soit I un intervalle contenant a et f définie sur l'intervalle I sauf, éventuellement, en a.

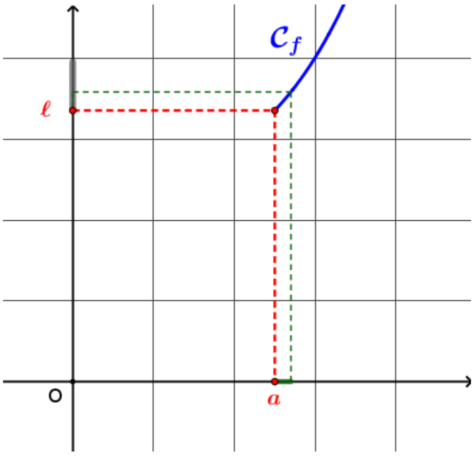
Si tout intervalle ouvert, contenant ℓ, contient toutes les valeurs de f, lorsque x devient "suffisamment proche" de a, alors on écrit que f a pour limite ℓ en a et on note $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell}$.

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $0 < \delta$ tel que, si $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$.



Remarque : Dans le cas ou a est une borne de l'intervalle, on considère les limites à gauche ou à droite de a et on note respectivement $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \ell}$ ou $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \ell}$.





Propriétés :

- Si $a > 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0$.
- Pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$.
- Si P est un polynôme alors, pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle alors, pour tout réel a de l'ensemble de définition de F, $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Représenter la fonction f sur la calculatrice puis observer la courbe et le tableau de valeur au voisinage de 0.
3) Calculer les limites à gauche et à droite de 0 de la fonction f. Conclure.

V Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux réels.

1) Limite d'une somme

Le tableau suivant donne $\lim(f+g)$ lorsqu'elle existe.

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	l'	$+\infty$
$+\infty$			
l			
$-\infty$			

2) Limite d'un produit

Le tableau suivant donne $\lim(f\times g)$ lorsqu'elle existe.

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$\ell'<0$	$\ell'=0$	$\ell'>0$	$+\infty$
$+\infty$					
$\ell>0$					
$\ell=0$					
$\ell<0$					
$-\infty$					

3) Limite d'un inverse

$\lim f$	$-\infty$	$\ell\neq 0$	$\ell=0$ et $f<0$	$\ell=0$ et $f>0$	$+\infty$
$\lim \frac{1}{f}$					

4) Limite d'un quotient

Puisque $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$ alors les deux tableaux précédents permettent de conclure.

Exercice 4 : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5x-7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

Remarque : En cas d'indétermination, un calcul supplémentaire est, en général, nécessaire.

Exercice 5 : Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+5x-7$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-2x+1}{6x^2-5}$.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$.

1) Montrer que la droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Montrer que la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

VI Limites et composition

Théorème : Soit f et g deux fonctions et trois lettres a, b et c désignant, soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=c$

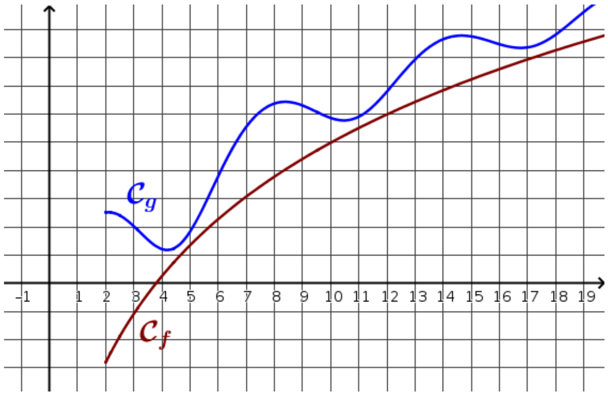
Exercice 7 : Déterminer les limites de la fonction $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ aux bornes de son ensemble de définition.

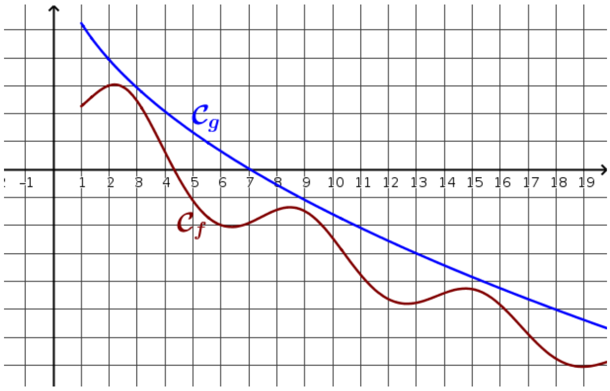
VII Limites et comparaisons

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.





Théorèmes : De manière analogue,

- Pour f et g définies sur $]-\infty;a[$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to-\infty$.
- Pour f et g définies sur$]a-\eta;a[$ ou $]a;a+\eta[$ avec $\eta>0$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to a$.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1) Étudier les variations de f.
2) En déduire que, pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^x \geqslant x$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
3) En posant $X=-x$, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Théorème de croissance comparée

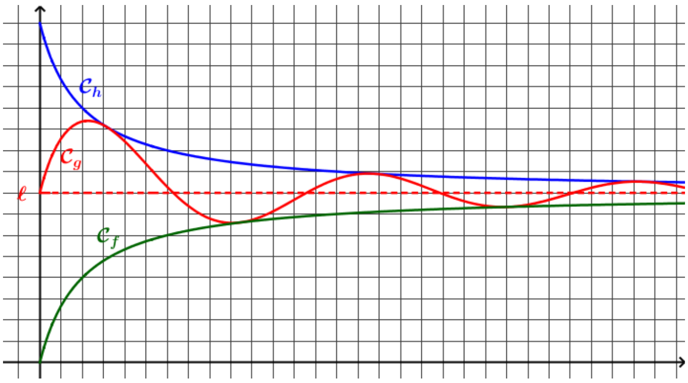
Pour tout entier naturel n, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0}$.

Démonstration 1

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$.

Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$



Théorèmes : De manière analogue,

- Pour f, g et h définies sur $]-\infty;a[$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to-\infty$.
- Pour f, g et h définies sur$]a-\eta;a[$ ou $]a;a+\eta[$ avec $\eta>0$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to a$.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x^2+1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.