Loi binomiale

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul.

I La loi de Bernoulli [1]

Définition : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues.

Par convention, l'une des issues est nommée succès (notée S) et l'autre échec (notée $\overline{S}$).

Si l'on note p la probabilité de succès, soit $P(S) = p$, alors la probabilité d'échec est $1 - p$, soit $P(\overline{S}) = 1 - p$.

Exemple : Un feu tricolore suit le cycle d'allumage suivant : vert $45s$, orange $5s$ et rouge $20s$.

L'expérience consistant à être autorisé à passer quand on se trouve à hauteur du feu est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p = \dfrac{9}{14}$.

Définition : La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès lors de l'épreuve de Bernoulli et 0 en cas d'échec suit une loi de Bernoulli .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X se résume alors par le tableau ci-contre.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété : Si X suit une loi de Bernoulli alors $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Démonstration 1

Exercice 1 : Mise en œuvre en Python

En Python, le programme ci-contre simule une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

a) Écrire le script ci-contre et le faire fonctionner.

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ pour $p = \dfrac{9}{14}$.

c) Modifier le programme pour vérifier ces résultats.

```python
from random import random

def bernoulli(p):
    if random() <= p:
        X = 1
    else:
        X = 0
    return(X)
```

II Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Définition : Un schéma de Bernoulli de taille n est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : Un trajet comporte le passage à 3 feux tricolores fonctionnant indépendamment et suivant le même cycle d'allumage : vert $45s$, orange $5s$ et rouge $20s$.

On nomme S l'événement "être autorisé à passer quand on arrive à hauteur du feux".

a) Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) Calculer la probabilité de n'avoir qu'un seul feu vert sur le trajet.

Définition : Le nombre de façons d'obtenir k succès parmi n dans un schéma de Bernoulli de taille n est appelé nombre de combinaisons de k parmi n ou coefficient binomial $(n\,;k)$ et se note $\dbinom{n}{k}$.

Exercice 2 : À l'aide de l'arbre précédent, retrouver $\dbinom{3}{0} = \ldots$, $\dbinom{3}{1} = \ldots$, $\dbinom{3}{2} = \ldots$ et $\dbinom{3}{3} = \ldots$.

1. Jacques ou Jakob Bernoulli (1654-1705) est un mathématicien et physicien suisse (né et mort à Bâle), frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli. (source wikipédia)

Propriétés :

- Lorsque $k > n$ alors $\binom{n}{k} = \ldots$
- $\binom{n}{n} = \ldots,\quad \binom{n}{0} = \ldots,\quad \binom{n}{1} = \ldots,\quad \binom{n}{n-1} = \ldots$
- Par convention $\binom{0}{0} = 1$
- Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, on a la relation $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
- Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
- Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, on a la relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration 2

Définition : Triangle de Pascal [2]

Cette disposition permet de retrouver les coefficients binomiaux à partir des précédents en utilisant les relations précédentes.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1						
2						
3						
4						
5						

III La loi binomiale

Définition : On répète n fois et de manières indépendantes, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p et on nomme X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus.

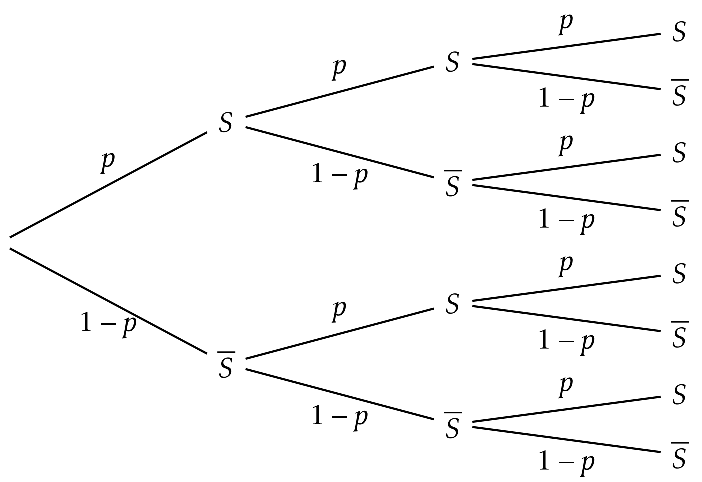
La loi de probabilité de X est nommée loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$

Propriété : $P(X = k)$ est la probabilité de réaliser k succès parmi n épreuves.

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}}$$

Démonstration 3

Illustration : Avec $n = 3$.



2. Blaise Pascal , né le 19 juin 1623 à Clermont (aujourd'hui Clermont-Ferrand) en Auvergne et mort le 19 août 1662 à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français. (source wikipédia)

Exercice 3 : Un concours se compose d'un questionnaire à choix multiple (QCM). Il comporte 12 questions pour lesquelles quatre réponses sont proposées. A chaque fois, une seule réponse est exacte. Un candidat répond au hasard à chaque question du QCM.

a) Avec quelle probabilité peut-il avoir la moitié des réponses exactes ?

b) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins trois quarts des réponses fausses ?

Propriété : Si $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$ alors l'espérance est $\boxed{E(X) = np}$ et la variance est $\boxed{V(X) = np(1-p)}$.

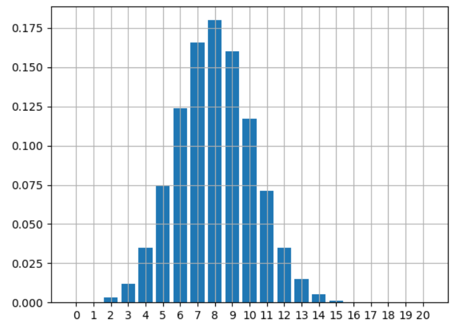
Démonstration 4

Exercice 4 : En reprenant la situation de l'exercice précédent, combien de bonnes réponses un candidat qui répond au hasard à chaque question peut-il espérer obtenir ?

Représentation de la loi binomiale

La distribution de la loi binomiale peut être représentée à l'aide d'un diagramme en colonnes. Le graphique prend la forme d'une cloche approximativement symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \lambda$ où λ est l'espérance.

Exemple : Loi binomiale $(20\,;0,4)$



IV Fluctuation et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $(n\,;p)$ et un réel α tel que $0 < \alpha < 1$.

Définition : Soient deux réels a et b tels que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ alors l'intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque de α).

Remarque : Comme $P(0 \leqslant X \leqslant n) = 1$ alors $[0\,;n]$ est un intervalle de fluctuation de X a tous les seuils.

Exercice 5 : $X \sim \mathcal{B}(100\,;0,55)$ et $\alpha = 5\,\%$.

Montrer que $[45\,;68]$, $[0\,;64]$ et $[46\,;100]$ sont des intervalles de fluctuation de X au seuil de 95 %.

Propriété : Soient deux réels a et b.

Si $P(X < a) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ et $P(X > b) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ alors $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil de $1-\alpha$.

Définition : Sous les conditions précédentes, $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation centré de X.

Démonstration 5

Propriété : **Méthode d'obtention d'un intervalle de fluctuation centré**

Soient a le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > \frac{\alpha}{2}$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$ alors $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation centré de X au seuil de $1-\alpha$.

Démonstration 6

Exercice 6 : $X \sim \mathcal{B}(100\,;0,55)$ et $\alpha = 5\,\%$.

Déterminer un intervalle de fluctuation centré de X au seuil de 95 %.

