Probabilités

I Probabilité conditionnelle

L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire, l'univers $\mathcal{E}$, est muni d'une probabilité P.

Définition : A est un événement de $\mathcal{E}$ tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B de $\mathcal{E}$, la probabilité de B sachant A est la probabilité que B se réalise sachant A est déjà réalisé. On la note $P_A(B)$ et l'on a :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Exercice 1 : Dans mes courriels 60 % sont des publicités, 30 % ont un contenu intéressant et 5 % sont des publicités intéressantes. Quand j'ouvre un courriel de publicité, quelle probabilité qu'il contienne une offre intéressante ?

Propriété : Sur $\mathcal{E}$, P_A définie une nouvelle probabilité, dite probabilité conditionnelle.

On a donc, pour tout événement B de $\mathcal{E}$, $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$ et $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

Remarque : Si $P(B) \neq 0$, on a de la même manière $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Propriété : Formule des probabilités composées

Pour tous événements A et B de $\mathcal{E}$, si $P(A) \neq 0$ alors $\boxed{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$.

De même, si $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Exercice 2 : Un vaccin est efficace à 98 % .
Lors d'une campagne de vaccination on a couvert 80 % d'une population. On choisi ensuite une personne au hasard dans cette population, quelle est la probabilité que la personne soit vaccinée et malade ?

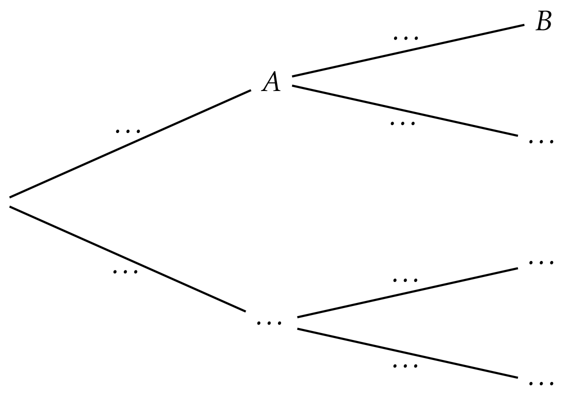
Illustration : A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Sous forme de tableau des probabilités

	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

Probabilités manquantes :

Sous forme d'arbre des probabilités



Probabilités manquantes :

Exercice 3 : Illustrer l'exercice 2 des deux manières.

II Partition de l'univers

Définition : Une famille d'événements forme une partition de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est l'univers.

Autrement dit, une famille d'événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'univers $\mathcal{E}$ forme une partition de l'univers si, pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \mathcal{E}$.

Exemple : Un événement A et son contraire forment une partition de $\mathcal{E}$. En effet, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \mathcal{E}$.

Propriété : Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers $\mathcal{E}$ et B un événement de $\mathcal{E}$, alors :

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)}$$

Si, de plus, chaque A_i a une probabilité non nulle, avec la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\boxed{P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)}$$

Exercice 4 : Dans un magasin, on solde 30 % des vêtements femme, 40 % des vêtements homme et 50 % des vêtements enfant. Le stock du magasin est constitué pour moitié de vêtements femme, un tiers de vêtements homme et le reste de vêtements pour enfant.
Une personne ayant acheté un vêtement sort du magasin. Quelle est la probabilité qu'elle ait bénéficié d'une réduction ?

Remarque : Dans le cas particulier d'une partition de l'univers formé par un événement et son contraire la formule des probabilités totales devient :

Soit A et B deux événements de $\mathcal{E}$ alors $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$.

Et si, de plus $0 < P(A) < 1$ alors $\boxed{P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$.

Exercice 5 : Au lycée, on recense 30 % de fumeurs. 80 % des non fumeurs se disent gênés par la fumée de cigarette alors seul 25 % des fumeurs le sont.
On choisi un élève au hasard, quelle est la probabilité que la fumée de cigarette le dérange ?

III Indépendance

Définition : Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : Ne pas confondre avec des événements incompatibles (lorsque $A \cap B = \emptyset$).

Propriété : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle alors, il est équivalent d'écrire :

- A et B sont indépendants
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$

Exercice 6 : On choisi au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement "La carte piochée est un as" et B l'événement "La carte piochée est un pique".
A et B sont-ils incompatibles ? A et B sont-ils indépendants ?

Propriété : Soit A et B deux événements indépendants alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

IV Variables aléatoires discrètes

Définition : Une variable aléatoire discrète sur $\mathcal{E}$ est une fonction qui à chaque élément de $\mathcal{E}$ associe un nombre réel.

Notations : Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathcal{E} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$

On note $X(\mathcal{E}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{E}$.

Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $(X = x_i)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui ont pour image x_i par la fonction X.

Autrement dit, $(X = x_i)$ est l'événement formé de toutes les issues ω telles que $X(\omega) = x_i$.

Exercice 7 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Les boules 1 à 3 sont rouges et les autres sont bleues. Un joueur tire une boule au hasard. Si le numéro est pair alors il gagne 5 € et si elle est bleue alors il perd 3 €. On définie alors la variable aléatoire G égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur. Définir $\mathcal{E}$, $G(\mathcal{E})$ et tous les événements de la forme $(G = x_i)$.

V Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition : Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, c'est donner pour chaque valeur x_i que prend X une probabilité p_i.

Conséquences : Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i = P(X = x_i)$ avec $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire sous la forme d'un tableau, sous la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définitions :

- L'espérance d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs x_i, pondérées par les p_i.

$$\boxed{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

- La variance de X est la moyenne des carrés des écarts des x_i à l'espérance, pondérées par les p_i.

$$\boxed{V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2}$$

- l'écart-type de X est la racine carrée de la variance. $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Théorème : Théorème de König [1] -Huygens [2]

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i^2 - E(X)^2} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Exercice 8 : On donne 10 euros pour participer au jeu suivant :
On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes, si cette carte est un as on gagne 50 €, si cette carte est une tête on gagne 10 € et dans les autres cas, on ne gagne rien. On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur. Donner la loi de G et son espérance et son écart type. Interpréter.

1. Johann Samuel König, né le 31 juillet 1712 à Büdingen, mort le 21 août 1757 à Zuilenstein, est un mathématicien allemand.
2. Christian Huygens, 14 avril 1629 - 8 juillet 1695 à La Haye, est un mathématicien, astronome et physicien néerlandais.

