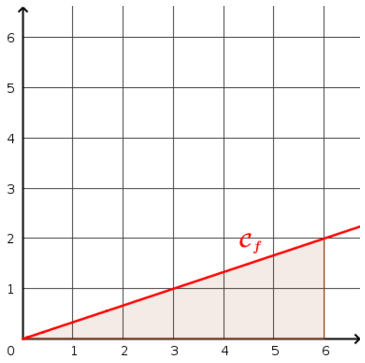
Calcul intégral

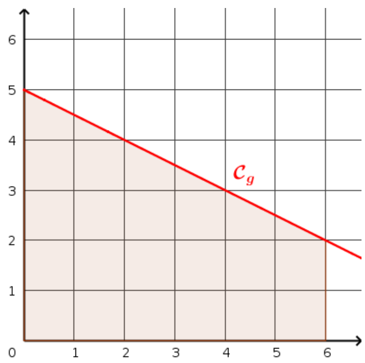
Partie A : Aire sous une courbe

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire, en unités d'aire, sous chacune des courbes entre les abscisses 0 et 6.

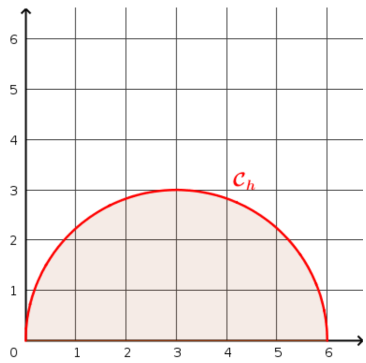
a) $f(x) = \frac{1}{3}x$



b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$



c) $h(x) = \sqrt{9-(x-3)^2}$

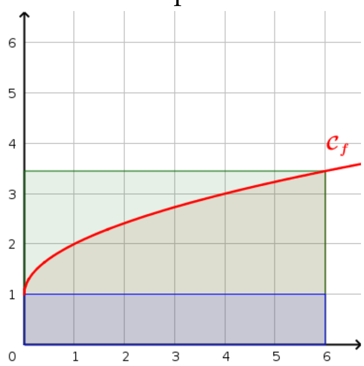


Partie B : Approximation de l'aire sous une courbe par la méthode des rectangles

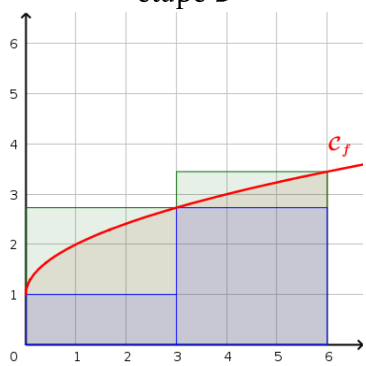
La fonction $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ est représentée ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

Afin d'estimer l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f entre les abscisses 0 et 6, on construit des rectangles.

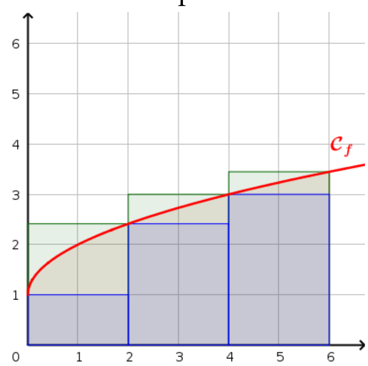
étape 1



étape 2



étape 3



1) Pour les étapes 1 à 3, les rectangles sont représentés.

   Construire les rectangles à l'étape 4.

2) On poursuit ensuite de la même manière, en numérotant les étapes par un entier naturel non nul n.

   Soit a_n la somme des aires des rectangles "supérieurs" et b_n la somme des aires des rectangles "inférieurs", à l'étape n.

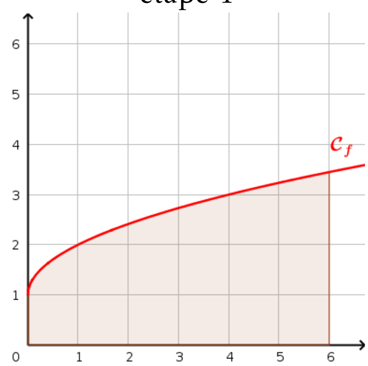
   On a donc $a_1 = 6 \times \left(1+\sqrt{6}\right)$ et $b_1 = 6 \times \left(1+\sqrt{0}\right) = 6$.

   Calculer a_2 et b_2 puis a_3 et b_3

3) Pour tout entier n, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

4) Conjecturer le sens de variation et le comportement à l'infini des suites (a_n) et (b_n) et contrôler à l'aide de la calculatrice.

étape 4



Pour s'entraîner : Ex 32 à 42 p 254

Partie C : Étude d'une aire variable

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$.

On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f entre $x = a$ et $x = b$.

1) En prenant une fonction constante $f(x) = 5$.
   a) Représenter f à l'aide du quadrillage.
   b) Pour $x \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) A l'aide de la formule donnant l'aire d'un rectangle, exprimer $S(x)$ en fonction de x.
   d) Calculer la dérivée de la fonction S et exprimer le lien entre S et f.

2) En prenant une fonction affine $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$.
   a) Représenter f à l'aide du quadrillage.
   b) Pour $x \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) A l'aide de la formule donnant l'aire d'un trapèze, exprimer $S(x)$ en fonction de x.
   d) Calculer la dérivée de la fonction S et exprimer le lien entre S et f.

3) En prenant une fonction continue, positive et croissante.
   a) Représenter $f(x) = x^2$ à l'aide du quadrillage, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b) Pour $a \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $S(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) Pour $h > 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $S(a+h) = \displaystyle\int_0^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

      En déduire un encadrement de $S(a+h) - S(a)$ puis de $\dfrac{S(a+h) - S(a)}{h}$.
      Que peut-on en déduire lorsque h tend vers 0 ?
   d) Pour $h < 0$, tel que $a + h \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $S(a+h) = \displaystyle\int_0^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ et reprendre la question c)
   e) En déduire que S est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et indiquer sa dérivée.
   f) Exprimer le lien entre S et f.