Dénombrement et combinatoire

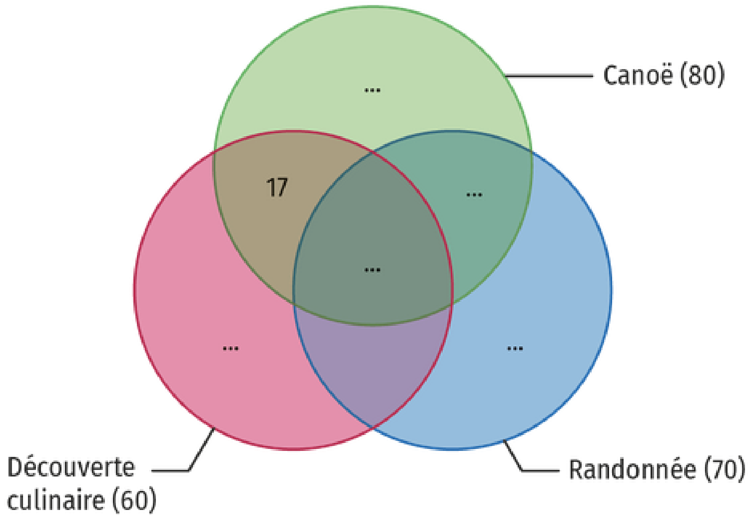
Partie A : Cardinal d'un ensemble et produit cartésien

Un club de vacances propose trois activités durant la semaine : randonnée, canoë et découverte culinaire. Parmi les 180 vacanciers, 70 se sont inscrits à la randonnée, 80 au canoë et 60 à la découverte culinaire.

1) Chaque vacancier peut choisir de faire de 0 à 3 activités durant ses vacances.
   Combien de programmes différents un vacancier peut-il construire ?

2) Pourquoi peut-on affirmer que certains vacanciers se sont inscrits à plusieurs activités ?

Pour résumer la situation, les organisateurs décident de consigner les informations dans le diagramme ci-contre appelé **diagramme de Venn** [1].
On peut y lire que 17 personnes sont inscrites à la découverte culinaire et au canoë mais pas à la randonnée.



3) a) Compléter ce diagramme en sachant que 25 personnes sont inscrites au canoë et à la randonnée mais pas à la découverte culinaire et que personne n'est inscrit à la fois à la randonnée et à la découverte culinaire.

   b) Combien de personnes ne sont inscrites à aucune activité ?

On appelle **cardinal** d'un ensemble E le nombre d'éléments de cet ensemble et on le note $\text{Card}(E)$.

Soient D, C et R l'ensemble des vacanciers inscrits respectivement à la découverte culinaire, au canoë et à la randonnée.

4) Donner les cardinaux des ensembles R, C, D, $R \cup D$ et $C \cup D$.

5) Quelle relation obtient-on entre $\text{Card}(R)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(R \cup D)$?

6) A-t-on une relation analogue entre $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(C \cup D)$?

À la fin de la semaine de vacances, des prix sont décernés pour chacune de ces activités. Pour chacune d'elle, l'organisation du club désigne le meilleur vacancier ou la meilleure vacancière et lui offre une récompense. On forme ainsi un **triplet** de vacanciers récompensés.

7) Combien de triplets de récompenses peut-on former ? (On suppose qu'un vacancier peut être récompensé pour plusieurs disciplines différentes.)

On appelle **produit cartésien** des ensembles C, D et R l'ensemble des triplets formés à partir d'un élément de chacun de ces ensembles et on le note $C \times D \times R$. On a donc :

$$\boxed{\text{Card}(C \times D \times R) = \ldots \qquad}.$$

1. John Venn (1834-1923) est un mathématicien et logicien britannique.

Partie B : Parties d'un ensemble

1) Soit l'ensemble $E = \{a;b;c\}$ constitué de trois éléments distincts.
   a) Un **singleton** est un ensemble (qui s'écrit entre accolades) à 1 élément.
   Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?
   b) Une **paire** est un ensemble à 2 éléments. Les éléments sont donc distincts et l'ordre n'a pas d'importance. Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?
   c) Combien d'ensembles à 3 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

2) Soit l'ensemble $F = \{a;b;c;d\}$.
   a) Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   b) Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   c) Combien d'ensembles à 3 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   d) Combien d'ensembles à 4 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

3) Soient n un entier naturel non nul et l'ensemble G à n éléments $G = \{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$.
   a) Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?
   b) Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?
   c) Pour un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, combien d'ensembles à k éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?
   d) Finalement, combien d'ensembles peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?

Un sous ensemble d'un ensemble G est appelé **partie** de G.

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est donc ....

Partie C : Listes d'un ensemble

1) Soit l'ensemble $E = \{a;b;c\}$ constitué de trois éléments distincts.
   a) Un **1-uplet** est une liste (qui s'écrit entre parenthèses) à 1 élément.
   Combien de 1-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?
   b) Un 2-uplet ou **couple** est une liste à 2 éléments. Les éléments ne sont pas forcément distincts et l'ordre est important.
   Combien de couples peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?
   c) Un 3-uplet ou **triplet** est une liste à 3 éléments.
   Combien de triplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

2) Soit l'ensemble $F = \{a;b;c;d\}$.
   a) Combien de 1-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   b) Combien de couples peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   c) Combien de triplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?
   d) Combien de 4-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

3) Soient n un entier naturel non nul et l'ensemble G à n éléments $G = \{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$.
   Pour un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, combien de k-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?