Équations différentielles

Équation $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$

1) Équation $y' = 3y$
   a) Vérifier que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation $y' = 3y$.
   b) Proposer d'autres solutions pour cette équation.
   c) Soit f une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation $y' = 3y$, en étudiant le quotient de f par la fonction e^{3x}, déterminer toutes les solutions de cette équation.
2) Donner, sans justification, les solutions sur $\mathbb{R}$, de chacune des équations suivantes :
   a) $y' = 5y$;
   b) $y' = -y$.
3) Pour chacune des fonctions suivantes, donner une équation différentielle dont elle est solution.
   a) $f(x) = -3\mathrm{e}^{2x}$
   b) $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$
   c) $h(x) = 0,3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$
   d) $p(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}$
   e) $q(x) = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-x}$

Équation $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1) Équation $(\mathcal{E}) : y' = 5y + 3$
   a) Vérifier qu'une fonction f est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, la fonction $f + \dfrac{3}{5}$ est solution de l'équation $y' = 5y$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.
2) Donner, sans justification, les solutions sur $\mathbb{R}$, de chacune des équations suivantes :
   a) $y' = 4y - 7$;
   b) $y' = -3y + 4$;
   c) $y' = ay + b$

Conditions initiales

Un circuit électrique contenant une résistance et une bobine est appelé « circuit RL ».

Lorsque ces deux éléments sont branchés en série et qu'on applique une tension constante U (en volt) aux bornes du circuit, l'intensité (en ampère) en fonction du temps, notée $i(t)$, respecte l'équation différentielle suivante, notée (E) : $U = L \times i'(t) + R \times i(t)$, où L est l'inductance de la bobine (en henry) et R la résistance (en ohm).

L et R sont des constantes non nulles.

On cherche à déterminer l'intensité dans un tel circuit en fonction du temps t (en seconde).

1) Justifier que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme $i'(t) = ai(t) + b$ où a et b sont des constantes à exprimer en fonction de R, U et L.
2) En déduire l'expression de l'intensité du courant dans le circuit en fonction du temps.
3) À l'instant $t = 0$, aucun courant ne circule dans le circuit, on a donc la condition initiale $i(0) = 0$. Montrer que $i(t) = \dfrac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.