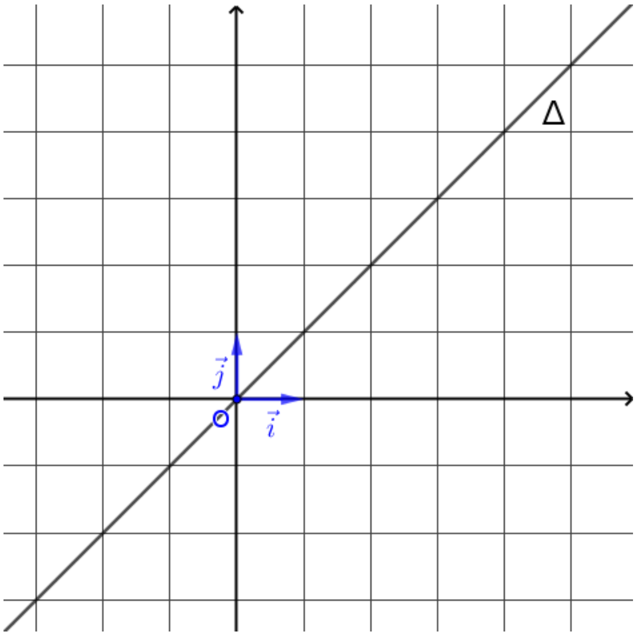
De l'exponentielle au logarithme népérien

Partie A : La première bissectrice du plan

Le plan est muni dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel est représentée la première bissectrice Δ . On considère deux points $M(a\ ;\ b)$ et $N(b\ ;\ a)$ dont on a permuté les coordonnées.

1) Quelques exemples pour une conjecture :
   a) Pour $a = 1$ et $b = 3$, placer M et N.
   b) Pour $a = -2$ et $b = 1$, placer M et N.
   c) Quelle conjecture peut-on émettre ?
2) Justification :
   a) Donner une équation de la droite Δ.
   b) Calculer les coordonnées du milieu de $[MN]$.
   c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ puis celles du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
   d) Calculer le produit scalaire des deux vecteurs.
   e) Justifier alors la conjecture du 1c).



Partie B : Sans utiliser la calculatrice

La courbe $\mathcal{C}$ représentée ci-dessous est celle de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

Pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution.

On note $\ln(k)$ cette solution (ln pour logarithme népérien).

1) À l'aide du graphique ci-contre, placer les points M_i puis estimer, au dixième, les valeurs manquantes :

$M_1(\ \ldots\ldots\ ;\ 5\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(5) \simeq \ldots$

$M_2(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(4) \simeq \ldots$

$M_3(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(3) \simeq \ldots$

$M_4(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(e) \simeq \ldots$

$M_5(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(2) \simeq \ldots$

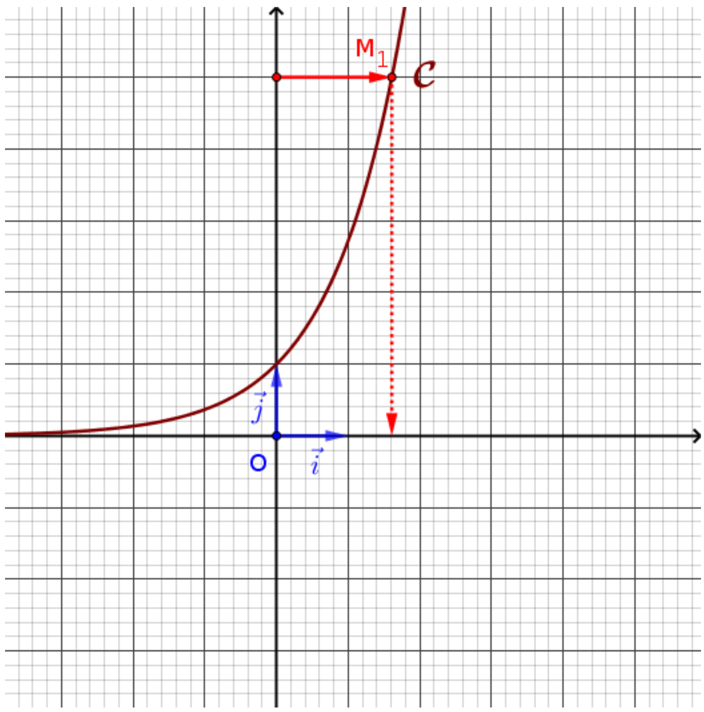
$M_6(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(1) \simeq \ldots$

$M_7(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(0,8) \simeq \ldots$

$M_8(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(0,6) \simeq \ldots$

$M_9(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(0,4) \simeq \ldots$

$M_{10}(\ \ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ ) \in \mathcal{C}$ donc $\ln(0,2) \simeq \ldots$



2) A chaque point $M_i(a\ ;\ b)$ de la courbe $\mathcal{C}$, on associe le point $N_i(b\ ;\ a)$.

   a) En utilisant le résultat de la partie A, placer les points N_i pour i allant de 1 à 10.

   b) Tracer la courbe passant par les points N_i, on la nommera Γ.

3) La courbe Γ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(k\ ;\ \ln(k))$.

   Γ est donc la courbe représentative de la fonction logarithme népérien notée $\ln(x)$.

   a) Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\ln(x)$.

   b) Conjecturer les limites de la fonction $\ln(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

   c) D'après le graphique, dresser le tableau de variation puis le tableau signe de la fonction $\ln(x)$.

   d) Tracer la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 1 puis estimer son coefficient directeur. En déduire son équation réduite.

Partie C : Avec la calculatrice

1) À l'aide de la calculatrice, afficher un tableau des valeurs de la fonction logarithme népérien en partant de 0,1 avec un pas de 0,1.

   Recopier les valeurs obtenues, arrondies au centième près, dans le tableau ci-dessous.

2) a) Compléter avec une deuxième fonction qui donne le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien.

   Avec Numworks :

   Fonctions
   Tableau
   $\boxed{\text{OK}}$ sur $f(x)$
   Valider **Colonne de la dérivée**
   $\boxed{\text{Retour}}$

   Avec TI :

   $\boxed{f(x)}$
   $\backslash Y_2 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}(Y_1)|_{X=X}$
   $\boxed{\text{2nde}}$
   $\boxed{\text{table}}$

   b) Observer les valeurs de la dernière colonne puis émettre une conjecture à propos de la dérivée de la fonction logarithme népérien.

x	$\ln(x)$	$\ln'(x)$
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		
0,5		
0,7		
0,8		
0,9		
1		
1,1		
1,2		
1,3		
1,4		
1,5		
1,6		
1,7		