Variables aléatoires et concentration

Partie A : Espérance et variance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Un premier jeu permet de gagner 10 euros si le nombre est pair et 5 euros sinon.

Un deuxième jeu permet de gagner 5 euros si le nombre est 1 ou 2 ; de gagner 2 euros si le nombre est 3 et de ne rien gagner sinon.

X est la variable aléatoire donnant le gain au premier jeu et Y est la variable aléatoire donnant le gain au deuxième jeu.

1) Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
2) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
3) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
4) On note Z la variable aléatoire donnant la somme des gains des deux jeux : on écrit $Z = X + Y$.
   a) Que gagne-t-on au total si on fait 1 avec le dé ?
   b) En considérant les différentes issues du dé, déterminer toutes les valeurs z_i que peut prendre Z et donner la loi de probabilité de Z en complétant le tableau ci-dessous.

z_i	5				
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$				

   c) Calculer $E(Z)$ puis comparer $E(Z)$ avec $E(X) + E(Y)$.
   d) Calculer $V(Z)$ puis comparer $V(Z)$ avec $V(X) + V(Y)$.
   e) Calculer $P((X = 5) \cap (Y = 2))$ puis comparer avec $P(X = 5) \times P(Y = 2)$.
   Que peut on en déduire pour les variables aléatoires X et Y ?
5) On double les gains du deuxième jeu (modélisé par la variable aléatoire Y) et on note D la variable aléatoire donnant les gains à ce nouveau jeu.
   a) Calculer $E(D)$ après avoir déterminé la loi de probabilité de D.
   b) Comparer $E(D)$ et $E(Y)$.
   c) Calculer $V(D)$ puis comparer à $V(Y)$.

Partie B : Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Soit la fonction **binomiale** suivante permettant de simuler une variable aléatoire X en langage Python.

```
def binomiale(n; p):
        s=0
        for i in range(n):
                s=s+bernoulli(p)
        return s
```

1) À l'aide de la fonction **random**, compléter le programme en écrivant la fonction **bernoulli(p)** permettant de simuler une loi de Bernoulli de paramètre p.
2) Tester alors la fonction **binomiale** dans la console avec les paramètres $n = 50$ et $p = 0,21$.
   Expliquer pourquoi on simule ainsi une loi binomiale.
3) a) Établir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
   b) Contrôler les formules dans le cas $p = 0,21$ à l'aide d'un programme.

4) a) Rappeler l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y suivant une loi de binomiale de paramètre n et p.

   b) Contrôler le résultat dans le cas $n = 50$ et $p = 0,21$ à l'aide d'un programme.

5) À l'aide des résultats de la partie A, justifier les formules donnant l'espérance et la variance d'une loi de binomiale de paramètre n et p.