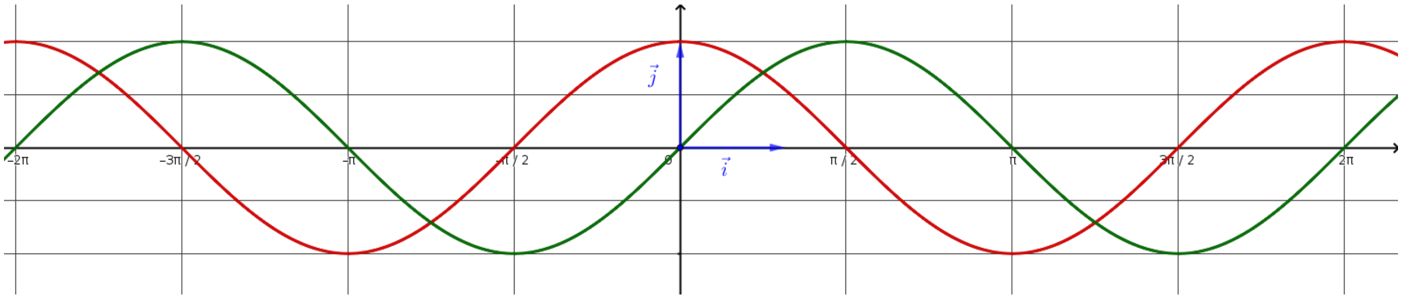
Fonctions trigonométriques

Partie A : Propriétés graphiques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique suivant, on a représenté les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus.



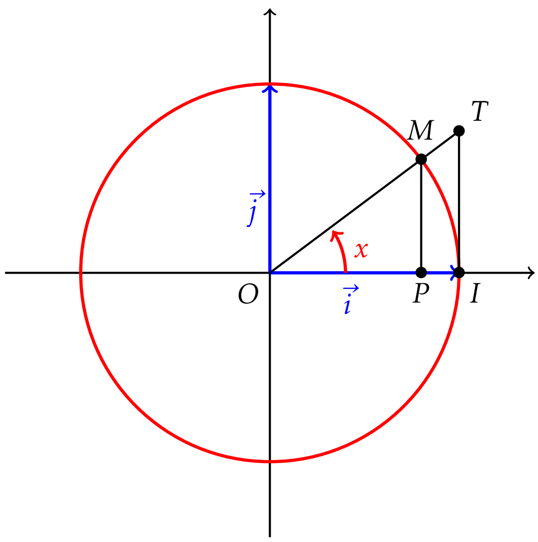
1) À l'aide de valeurs particulières de cosinus et sinus, identifier la courbe représentant chacune des fonctions.
2) Conjecturer la parité de chacune des fonctions puis la démontrer.
3) Conjecturer la périodicité de chacune des fonctions puis la démontrer.
4) Par quelle transformation les deux courbes se correspondent-elles ? Le démontrer.
5) Les propriétés précédentes permettent de réduire l'étude de ces fonctions à un intervalle de longueur finie. Donner un intervalle minimal pour cette étude.

Partie B : Dérivation

1) Soit la fonction f définie pour tout réel non nul x par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

   a) Soit $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point M correspond au réel x, en radians. Le point P est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le point T est l'intersection de la droite (OM) et de la tangente au cercle trigonométrique en I.



   En comparant les aires des triangles OMP et OTI à celle du secteur de disque OMI, établir que

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

b) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

c) À l'aide de la parité de f, déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$.

d) En déduire que la fonction sinus est dérivable en 0 et déterminer $\sin'(0)$.

2) a) Montrer que, pour tout réel $x \in]-\pi\ ;\ \pi[$, $x \neq 0$:

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = -\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \frac{x}{\cos(x)+1}$$

b) En déduire que la fonction cosinus est dérivable en 0 et déterminer $\cos'(0)$

3) a) Montrer que, pour tout réel x et tout réel non nul h :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x) \times \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \times \frac{\sin(h)}{h}$$

b) En déduire que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\sin'(x)$.

4) À l'aide de la relation $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\cos'(x)$.