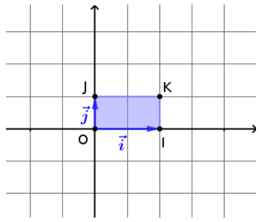
Calcul intégral

I Unité d'aire dans un repère orthogonal



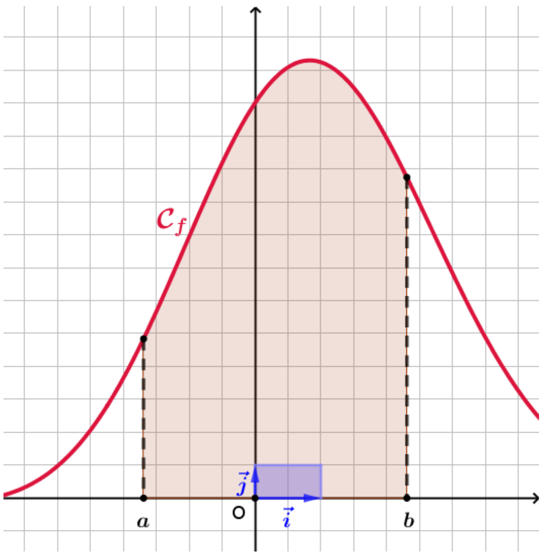
Définition : Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, soit I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ ainsi que K le point de coordonnées (1 ; 1) alors l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

Notation : $a(OIKJ) = 1$ u.a.

II Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



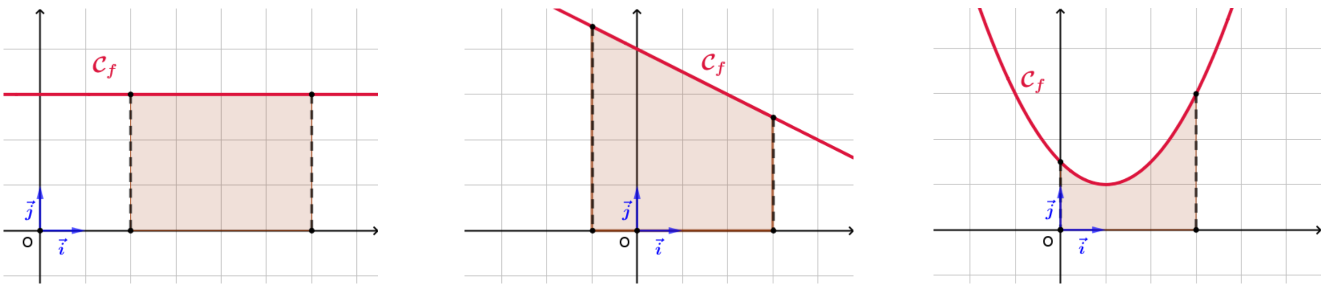
Définition : L'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée intégrale de f sur $[a ; b]$.

Notation : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui se lit « intégrale de a à b de $f(t)\,\mathrm{d}t$ ».

Remarques :

- a et b sont les bornes d'intégration ;
- t est la variable d'intégration, elle peut être remplacée par toute autre lettre, cela ne change pas la valeur de l'intégrale ;
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$;
- $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}u$ indiquent la variable d'intégration.

Exercice 1 : Estimer graphiquement les intégrales suivantes puis contrôler avec la calculatrice.

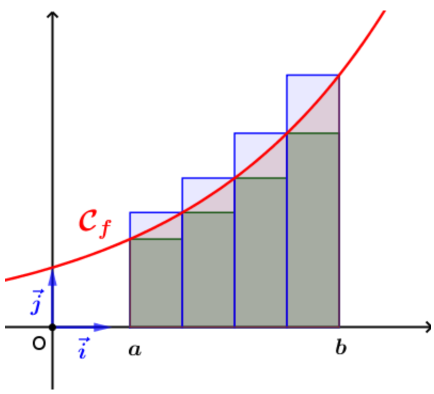


Propriété : L'intervalle $[a ; b]$ est partagé en n intervalles de même amplitude. $I(n)$ et $S(n)$ sont les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs construits à partir de $\mathcal{C}_f$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} I(n) = \lim_{n\to+\infty} S(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, si f est monotone :

$$I(n) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(n)$$



III Intégrale et primitive

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La fonction F, définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration 1

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Démonstration 2 (Enfin !)

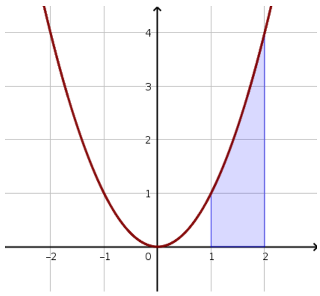
Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,20]$ par $f(x)=\ln(x)$.

a) Donner une primitive de f sur $[1\,;\,20]$ qui s'annule en $x=1$.

b) En déduire une primitive de $g(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $[1\,;\,20]$.

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Pour toute primitive F de f sur $[a\,;\,b]$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.



Notation : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Démonstration 3

Exercice 3 :

Calculer l'aire exacte sous la parabole $y=x^2$ entre les abscisses 1 et 2.

IV Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I alors, pour tous $a\in I$ et $b\in I$, l'intégrale de f de a à b est définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Remarques :

- Lorsque f est positive et $a\leqslant b$, on retrouve l'aire sous la courbe du III ;
- L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie ;
- La fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration 4

Exercice 4 : Calculer $\int_{-1}^5 t^2-3t\,\mathrm{d}t$.

Propriétés : Soient a, b et c trois réels d'un intervalle I ainsi que f et g deux fonctions continues sur I.

1) Nullité : $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$;

2) Opposition : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$;

3) Relation de Chasles : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$;

4) Linéarité : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$;

5) Positivité : Si $a \leqslant b$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$;

6) Négativité : Si $a \leqslant b$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$;

7) Relation d'ordre : Si $a \leqslant b$ et $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration 5

Propriété : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I alors, pour tous $a \in I$ et $b \in I$, $\displaystyle\int_a^b (u'v)(t)\,\mathrm{d}t = [(uv)(t)]_a^b - \int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration 6

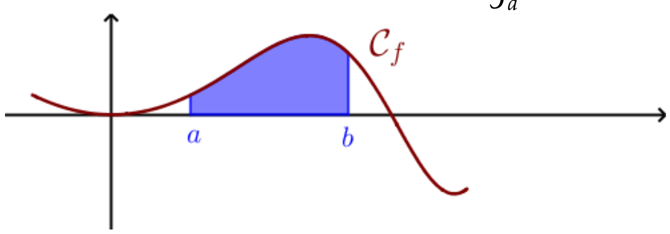
Exercice 5 : Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t \ln t\,\mathrm{d}t$.

V Calculs d'aires

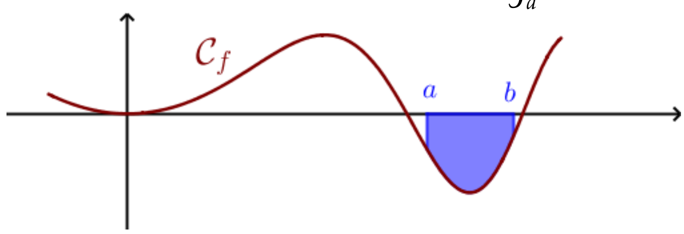
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Propriété : Soit $a \in I$ et $b \in I$ avec $a \leqslant b$. Lorsque f est de signe constant sur $[a\,;\,b]$, en notant S la surface comprise entre l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $a(S) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

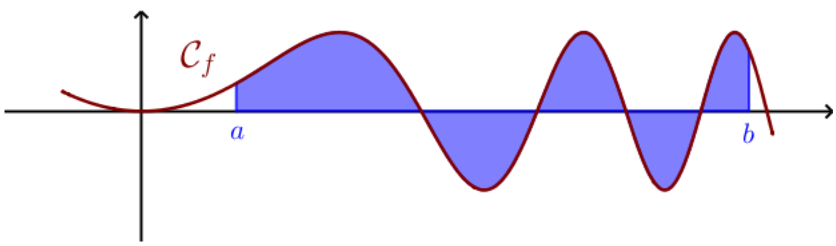


Si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $a(S) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$



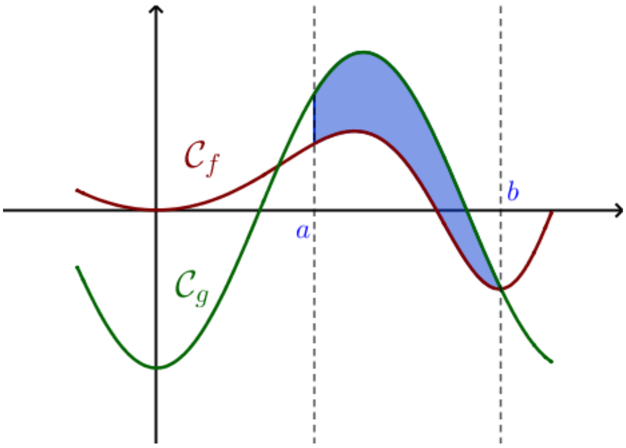
Démonstration 7

Corollaire : Lorsque f change de signe sur I, on partage l'intervalle I en plusieurs intervalles sur lesquels le signe de f est constant. Pour tous $a \in I$ et $b \in I$ avec $a \leqslant b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors la somme algébrique des aires des différentes surfaces affectées de leur signe.



Propriété : Soit g une autre fonction continue sur I de représentation $\mathcal{C}_g$.

Pour tous $a \in I$ et $b \in I$ avec $a \leqslant b$, si $f(x) \leqslant g(x)$ sur I alors l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b (g - f)(t)\,\mathrm{d}t$.



VI Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ est le nombre réel m donné par $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : Si la fonction f est positive sur $[a\,;\,b]$, le rectangle de hauteur m et de longueur $b-a$ a la même aire que la surface sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b.