Dénombrement et combinatoire

I Cardinal d'un ensemble fini

Définitions :

- Un ensemble E contenant un nombre fini d'éléments est appelé ensemble fini ;
- Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est alors appelé le cardinal de E et noté $\text{Card}(E)$.

Propriété : Soient A et B deux ensembles finis alors $\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)}$.

Définition : Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque leur intersection est vide. $A \cap B = \emptyset$

Corollaire : Soient A et B deux ensembles finis disjoints alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

II Produit cartésien

Définition : Soient A et B deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de A et B est l'ensemble constitué des couples $(x\ ;\ y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

On note $A \times B = \{(x\ ;\ y),\ x \in A,\ y \in B\}$.

Exercice 1 : Soient $A = \{1;\ 2\}$ et $B = \{3;\ 4;\ 5\}$, décrire $A \times B$.

Propriété : Soient A et B deux ensembles finis non vides, alors $\boxed{\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)}$.

Démonstration 1

Définitions : Soit A un ensemble non vide et k un entier naturel non nul alors :

- $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ termes}}$;
- Un k-uplet de A est un éléments de A^k.

Propriété : Soit A un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul alors $\boxed{\text{Card}(A^k) = [\text{Card}(A)]^k}$.

Démonstration 2

III Arrangements et permutations

Définition : Soit n un entier naturel non nul, la factorielle de n, est le nombre $\boxed{n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$.

Remarque : Par convention $0! = 1$.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul alors $n! = n \times (n-1)!$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exercice 2 : Calculer $n!$ pour n allant de 0 à 6.

Définition : Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel non nul.

Un arrangement de k éléments de A ou k-arrangement de A est un k-uplets d'éléments **distincts** de A.

Remarque : Nécessairement, $k \leqslant n$.

Exemple : Soit $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ alors $(4;\ 1;\ 2)$ et $(3;\ 4;\ 2)$ sont des 3-arrangements de A, mais pas $(2;\ 4;\ 2)$.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.

Le nombre de k-arrangements d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Démonstration 3

Définition : Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n.

Une permutation de A est un n-uplets d'éléments **distincts** de A. C'est donc un n-arrangement de A.

Exercice 3 : Soit $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, décrire les permutations de A.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Démonstration 4

IV Parties d'un ensemble

Définition : Une partie d'un ensemble A est un sous ensemble de A.

Exemple : Soit $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ alors $\{2\}$, $\emptyset$ et $\{4;\ 2;\ 3\}$ sont des parties de A.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Démonstration 5

V Combinaisons

Définition : Soient A un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.

Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.

Propriété : Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$.

Démonstration 6

Propriété : Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$.

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Relation de Pascal : Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Démonstration 7

Propriété : Soit n un entier naturel alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration 8

