Équations différentielles et primitives

I Équations différentielles

Définition : Une équation différentielle est une égalité dans laquelle apparaît une fonction inconnue y, une ou plusieurs de ses dérivées y', y'', ... et d'autres fonctions connues qui peuvent être des constantes ou notées f, g, ...

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle $\mathcal{E} : xy' + y = 3x^2$.

1) Montrer que la fonction $p(x) = x^2$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que toute fonction q de la forme $q(x) = x^2 + \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}$ sur tout intervalle ne contenant pas 0.

Remarques :

- Une équation différentielle peut avoir plusieurs solutions.
- Les solutions d'une équation différentielle peuvent dépendre de l'intervalle sur lequel on l'étudie.

Applications :

- En physique, en chimie ou en économie, la dérivée est interprétée comme un taux de variation instantané qui est le quotient des variations de la fonction (y) par les variations de la variable (x) sur un intervalle très petit.
- La dérivée (y') est alors appelée différentielle et la dérivée seconde (y''), différentielle seconde.
- On note $y' = \dfrac{dy}{dx}$ et $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.
- Suivant le contexte, la variable exprime un temps, une température, une position, un coût...
  Elle peut-être notée t, x, c... On obtient alors, par exemple, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ et $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.
- On isole une solution intéressante en considérant la valeur de la fonction cherchée pour une valeur donnée de la variable. Ces valeurs sont appelées « Condition initiale » .

Exercice 2 : L'équation $\mathcal{E}$ de l'exercice 1 peut s'écrire $t\dfrac{dy}{dt} + y = 3t^2$.

On admet que toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ sont de la forme $q(x) = x^2 + \dfrac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que sur cet intervalle, l'équation $\mathcal{E}$ n'admet qu'une seule solution de condition initiale $y(1) = 5$.

II Primitive d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute solution sur I de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement dit, une fonction F dérivable sur I est une primitive de f si, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 3 : Soit $F(x) = 5x^2 + 3$ et $G(x) = 5x^2 - 4$.

Montrer F et G sont deux primitives de la fonction $f(x) = 10x$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Admis *(Pour l'instant...)*

Remarque : Ce théorème indique l'existence de primitives. Néanmoins, pour certaines fonctions continues, on ne peut pas expliciter la primitive. C'est le cas de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

III Ensemble des primitives d'une fonction continue

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, deux primitives de f sur I ne diffèrent que d'une constante.

Démonstration 1

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble des primitives de $f(x) = 10x$, sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Démonstration 2

Exercice 5 : Déterminer la primitive H de $f(x) = 10x$, sur $\mathbb{R}$, vérifiant $H(1) = 2$.

IV Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	Intervalle de validité
$f(x) = 0$		
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$		
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = \mathrm{e}^x$		

Exercice 6 :

1) Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^7$.
2) Calculer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$.

V Opérations sur les primitives

Propriété : Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant U et V comme primitives respectives sur I et k un réel.

- Une primitive de la fonction $u + v$ sur I est la fonction $U + V$.
- Une primitive de la fonction ku sur I est la fonction kU.

Exercice 7 :

1) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 4x^3 - 4x + 5$.
2) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $g(x) = \dfrac{2x - 5\sqrt{x} + 3}{x}$.

Propriété : Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

Alors, $v \circ u$ est une primitive de $u' \times (v' \circ u)$.

Corollaire : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	validité
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$		
$\dfrac{u'}{u}$		
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		
$u'\mathrm{e}^u$		

Exercice 8 :

1) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$.

2) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $g(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.