Équations différentielles

I Équation $y' = ay$

Soit a un réel.

Définition : L'équation différentielle $y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelée :

« équation différentielle **homogène** du premier ordre à coefficients constants ».

Exemples : Les équations $y' = -3y$ et $7y' - 5y = 0$ sont des équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients constants avec $a = -3$ et $a = \dfrac{5}{7}$ respectivement.

Théorèmes :

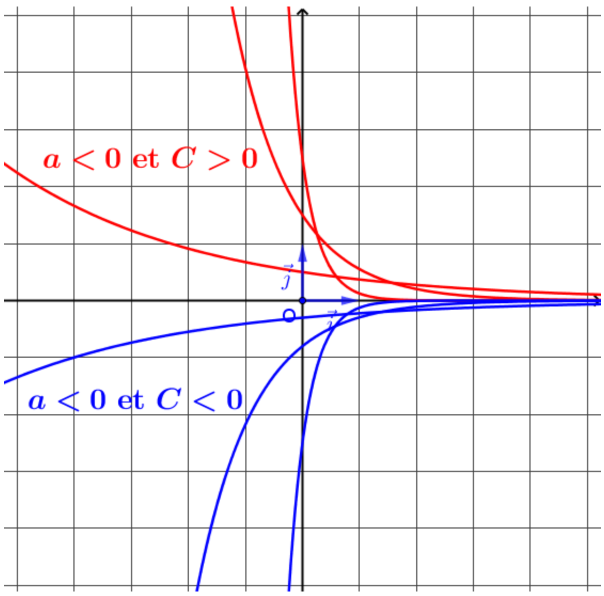
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

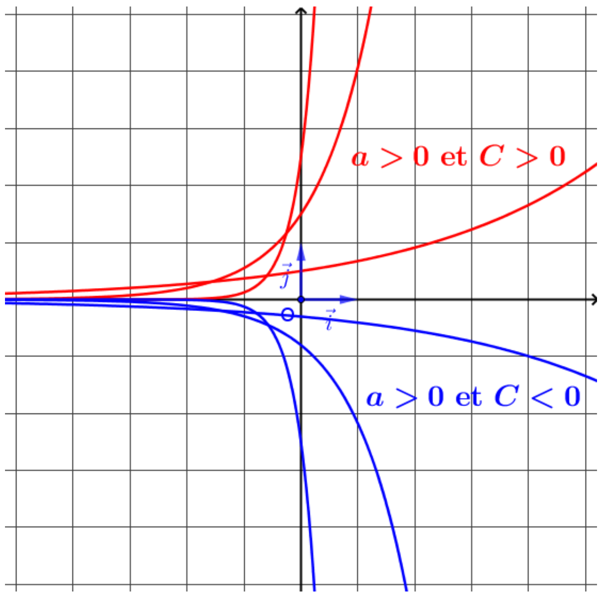
$$\boxed{f(x) = Ce^{ax} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}}.$$

- Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f telles que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration 1

Illustration : Allures des courbes des solutions





Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle $2y' - 3y = 0$ avec la condition initiale $y(2) = -1$.

Propriété : Soient f_1 et f_2 des solutions d'une même équation $(E) : y' = ay$.

Toute combinaison linéaire $\alpha f_1 + \beta f_2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ est aussi une solution de (E).

Démonstration 2

II Équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.

Définition : L'équation différentielle $y' = ay + b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelée :

« équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre ».

Exemples : Les équations $y' = -3y + 4$ et $7y' - 5y = 2$ sont des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants avec second membre.
Pour la première $a = -3$ et $b = 4$. Pour la deuxième $a = \frac{5}{7}$ et $b = \frac{2}{7}$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}}.$$

Démonstration 3

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle $2y' - 3y = 2$ avec la condition initiale $y(2) = \frac{1}{3}$.

III Équation $y' = ay + \varphi$ avec $a \neq 0$

Soit a un réel non nul et φ une fonction.

Définition : L'équation différentielle $y' = ay + \varphi$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = \varphi$, est également appelée :

« équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre ».

Exemples : Les équations $y' = -3y + \mathrm{e}^{5x}$ et $7y' - 5y = \frac{1}{x^2+1}$ sont des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants avec second membre.
Pour la première $a = -3$ et $\varphi(x) = \mathrm{e}^{5x}$. Pour la deuxième $a = \frac{5}{7}$ et $\varphi(x) = \frac{1}{7(x^2+1)}$.

Propriété : Soit g une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + \varphi$.

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f + g$ où f est une solution de l'équation différentielle homogène associée $y' = ay$.

Démonstration 4

Corollaire : Soit g une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + \varphi$.

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{ax} + g(x) \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}}$.

Exercice 3 : Soit l'équation différentielle $(E) : 2y' - 3y = 6x - 7$.

1) Déterminer une fonction affine solution de (E).
2) Résoudre (E) avec la condition initiale $y(0) = 5$.