Orthogonalité dans l'espace

I Notion d'orthogonalité dans l'espace

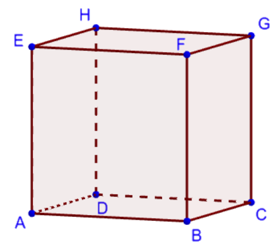
Définitions :

- Deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires.
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigée par ces vecteurs sont orthogonales.
- Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas forcément perpendiculaires.

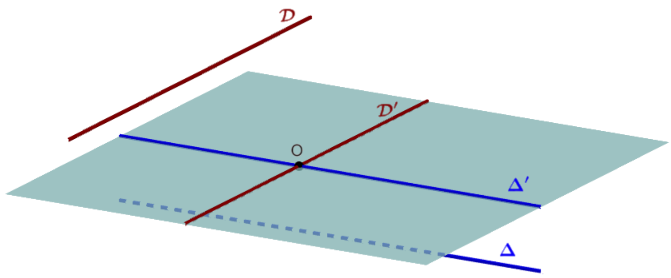
Exercice 1 : $ABCDEFGH$ est un cube.

1) Citer deux droites perpendiculaires.
2) Citer deux droites orthogonales non perpendiculaires.
3) Citer deux vecteurs orthogonaux.
4) Citer une droite et un plan orthogonaux.



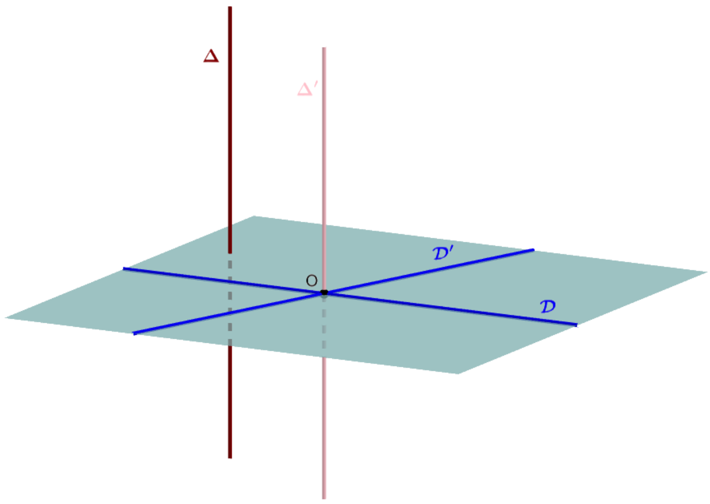
Propriété : Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Démonstration 1



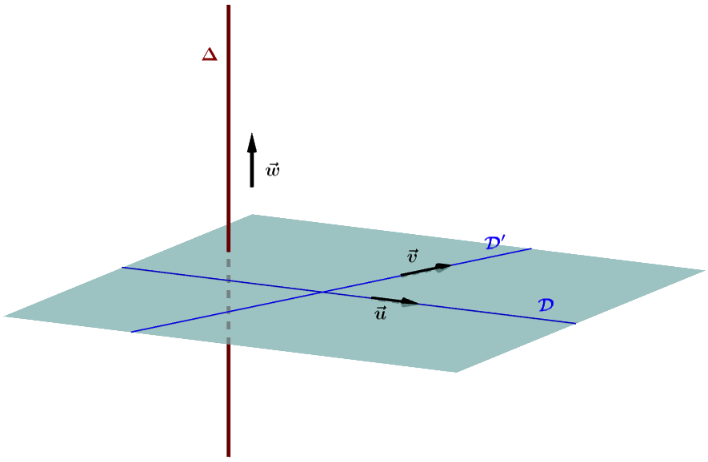
Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Admis



Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.

Démonstration 2



Définition : Soit Δ une droite orthogonale à un plan $\mathcal{P}$.

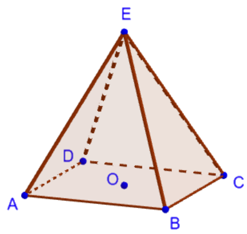
Tout vecteur directeur de Δ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2 : $ABCDE$ est une pyramide à base carrée.

Les faces latérales sont des triangles isocèles en E.

On note O le centre de la base $ABCD$.

Montrer que la droite (OE) est orthogonale au plan (ABC).



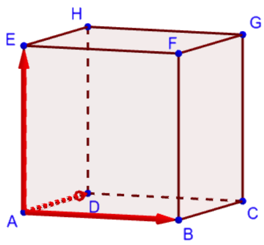
II Repère orthonormé de l'espace

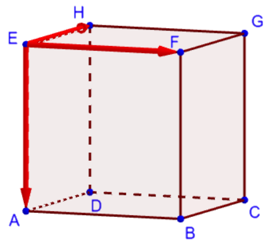
Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ un repère de l'espace et les points I, J et K tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

Définition : Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et si $OI = OJ = OK$ alors le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ est dit orthonormé.

Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube.

$\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ et $\left(E\,;\,\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA}\right)$ sont deux repères orthonormés de l'espace.



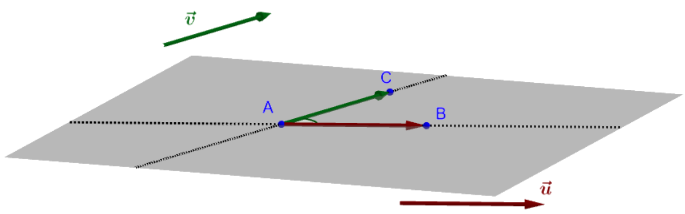


III Produit scalaire dans l'espace

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est le produit scalaire dans le plan (ABC) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

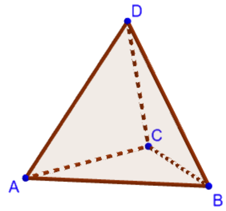


On retrouve alors toutes les propriétés obtenues dans le plan.

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- Sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

Exemple : $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 4 cm.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

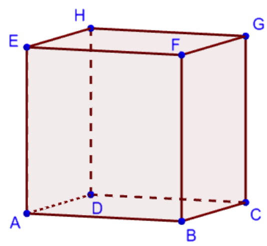
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ sinon.

Exercice 3 : $ABCDEFGH$ est un cube.
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$
2) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{FC}$
3) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF}$



Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k,

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v} = k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$;
- **Identités remarquables** : $\begin{cases} \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{cases}$
- **Identités de polarisation** : $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) \end{cases}$

Exercice 4 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{22}$.

Calculer la mesure principale de l'angle $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.

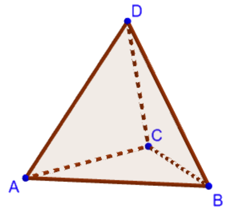
Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration 3

Exercice 5 : $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

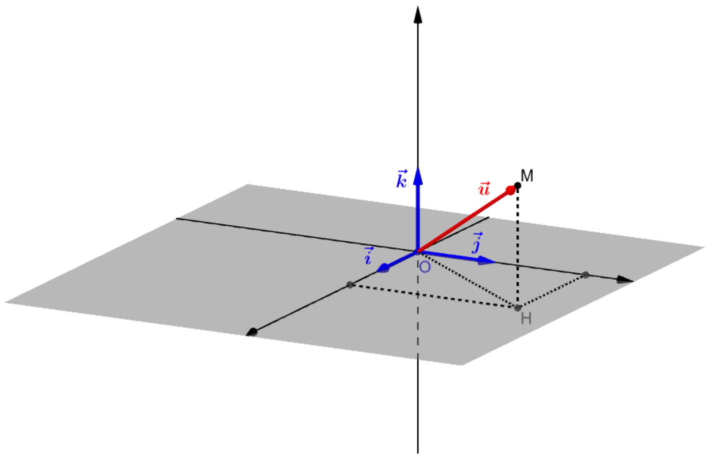


IV Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace,

soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$.

Démonstration 4



Corollaire : Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace,

soit $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors $\boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$.

Exercice 6 : Retrouver analytiquement la longueur de la diagonale d'un cube.

Exercice 7 : Dans un repère orthonormé de l'espace, soit $A(1\,;\,5\,;\,-3)$, $B(3;\,9\,;\,3)$ et $C(9\,;\,7\,;\,-7)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A puis déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

V Équation cartésienne d'une sphère

L'espace est muni d'un un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Propriété : La sphère de centre $\Omega(a\,;\,b\,;\,c)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2}$$

Démonstration 5

Exemple : La sphère de centre $\Omega(2\,;\,-3\,;\,4)$ et de rayon 5 a pour équation $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2 = 25$

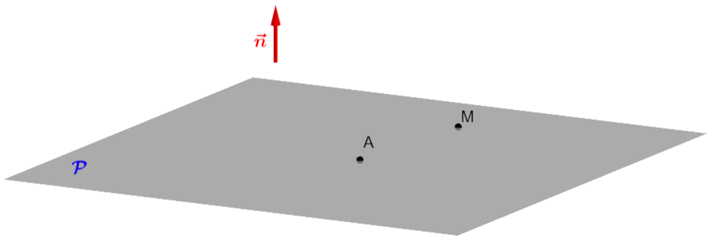
VI Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Propriété : Soit un vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$.

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A dont un vecteur normal est $\vec{n}$ a pour équation cartésienne $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ où $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Démonstration 6



Exercice 8 :

1) Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x-3y+4z+1=0$.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant le point $A(-1\,;\,2\,;\,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

VII Projection orthogonale

L'espace est muni d'un un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

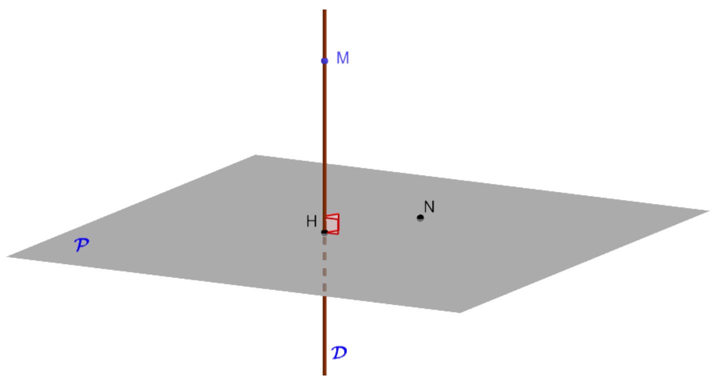
Définitions :

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est l'intersection de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par M avec le plan $\mathcal{P}$.
- Le projeté orthogonal d'un point N sur une droite $\mathcal{D}$ est l'intersection du plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par N avec la droite $\mathcal{D}$.

Exemple : Sur la figure ci-contre,

H est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

H est le projeté orthogonal du point N sur la droite $\mathcal{D}$.



Exercice 9 : Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $3x+y-z-2=0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A(5\,;\,1\,;\,3)$ sur $\mathcal{P}$.

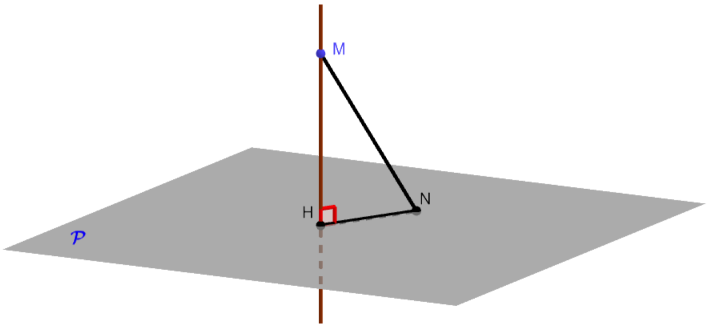
VIII Distance à un plan ou à une droite

L'espace est muni d'un un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$.

Définition : La distance d'un point M à un plan $\mathcal{P}$ est la plus petite des longueurs MN où $N \in \mathcal{P}$.

Propriété : La distance d'un point M à un plan $\mathcal{P}$ est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Démonstration 7



Propriété : Avec $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$, $M(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$, quel que soit $N(x_N\,;\,y_N\,;\,z_N) \in \mathcal{P}$.

La distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est $\boxed{d(M\,,\,\mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

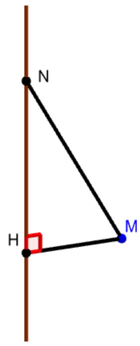
Démonstration 8

Exercice 10 : Vérifier la formule dans les conditions de l'exercice 9.

Définition : La distance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ est la plus petite des longueurs MN où $N \in \mathcal{D}$.

Propriété : La distance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Démonstration 9



Exercice 11 : La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Calculer la distance du point $A(2\,;\,-1\,;\,2)$ à la droite $\mathcal{D}$.