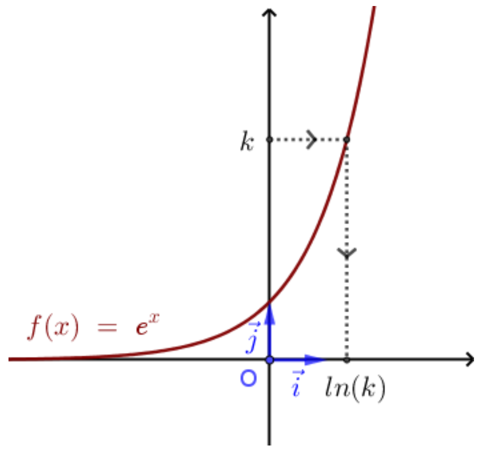
Fonction logarithme népérien

I Logarithme népérien d'un réel strictement positif

Définition : Pour tout réel strictement positif k, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution.

Cette solution est notée $\ln(k)$ pour logarithme népérien de k.



Conséquences :

- $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$
- $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$
- Pour tout réel $k > 0$, $e^{\ln(k)} = k$

Propriété : Pour tout réel $k > 0$, $e^x = k \Longleftrightarrow \ln(k) = x$

Démonstration 1

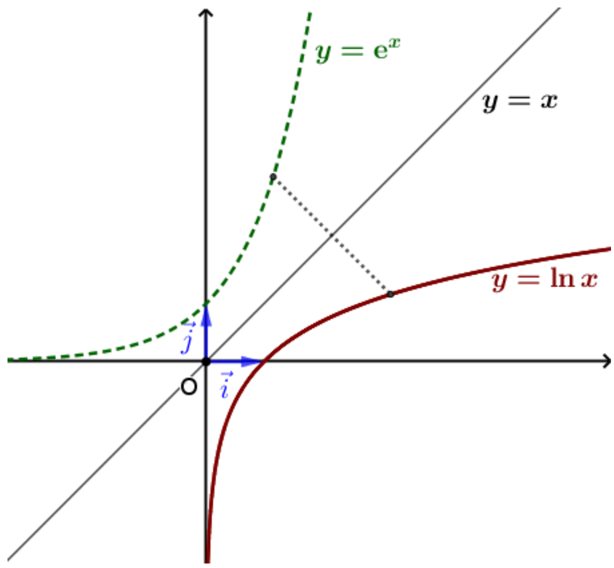
Exemples : $e^{\ln(2)} = \dots$ $\ln\left(e^5\right) = \dots$ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \dots$ $e^{\ln(e)} = \dots$

Remarque : S'il n'y a pas d'ambiguïté, pour un réel $k > 0$, on peut noter $\ln(k)$ simplement $\ln k$.

Attention, avec cette notation, $\ln k + 1 \neq \ln(k+1)$.

II La fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérien est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln : x \mapsto \ln x$.



Propriétés :

(1) La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle.

(2) Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonction e^x et $\ln x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(3) La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration 2

Conséquences :

- Tableau de variation de la fonction ln :
- Si $0 < x < 1$ alors …
- Si $1 < x$ alors …
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

x	0 $+\infty$
$f(x)$	

III Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Propriété : Relation fonctionnelle de la fonction logarithme

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$.

Démonstration 3

Exemples : $\ln 21 = \ln(3 \times 7) = \ln 3 + \ln 7$ et $\ln 40 = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 5) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \ln 5 = 3\ln 2 + \ln 5$

Conséquences : Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout entier relatif n,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots \qquad \ln\left(a^n\right) = \dots \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dots$$

Démonstration 4

Exercice 1 :

a) Exprimer à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$$A = \ln(3\mathrm{e}) \qquad B = \ln\left(2\mathrm{e}^{-5}\right) \qquad C = \ln(72) \qquad D = \ln\left(\frac{3\mathrm{e}^2}{2}\right)$$

b) Simplifier l'expression $E = \ln\left(3+\sqrt{5}\right)^7 + \ln\left(3-\sqrt{5}\right)^7$

IV Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

Démonstration 5

Exercice 2 : Montrer que la fonction ln est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété : Limites aux bornes de l'ensemble de définition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty}$

La courbe représentative de la fonction ln admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Démonstration 6

Propriété : Croissances comparées Pour tout entier $n > 0$, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0}$

Démonstration 7

V Fonctions de la forme $\ln(u)$

Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I, la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est notée $\ln(u)$.

Propriété : La fonction $\ln(u)$ a le même sens de variation que u.

Propriété : Si la fonction u est dérivable sur I alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$.

Démonstration 8

VI Fonction logarithme décimal

Définition : La fonction logarithme décimal est notée log et définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\boxed{\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}}$.

Propriété : La fonction logarithme décimal possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien.