Fonctions trigonométriques

I Parité et périodicité des fonctions

Dans cette partie, T est un réel strictement positif et la fonction f est définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

Définitions :

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est centré en 0 lorsque, pour tout $x \in E$, $-x \in E$.
- Une fonction f est paire lorsque $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est impaire lorsque $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.
- Une fonction f est périodique de période T lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x+T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.
- Lorsque f est périodique de période T, on dit que f est T-périodique.

Propriétés : Caractéristiques géométriques

- Si f est une fonction paire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si f est une fonction T-périodique alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exercice 1 : Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On définit les fonctions u et v, pour tout réel x, par : $u(x) = \dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ et $v(x) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$.

1) Montrer que la fonction u est paire.
2) Montrer que la fonction v est impaire.
3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) + v(x)$.

Propriétés : Restriction du domaine d'étude

- Si f est une fonction paire ou impaire alors on peut restreindre son étude au domaine :

$$\mathcal{D}_f \cap]-\infty\,;\,0] \text{ ou } \mathcal{D}_f \cap [0\,;\,+\infty[.$$

- Si f est une fonction T-périodique alors on peut restreindre son étude au domaine :

$$\mathcal{D}_f \cap [0\,;\,T] \text{ ou } \mathcal{D}_f \cap \left[-\frac{T}{2}\,;\,\frac{T}{2}\right].$$

- Si f est paire (ou impaire) et T-périodique alors on peut restreindre son étude au domaine :

$$\mathcal{D}_f \cap \left[0\,;\,\frac{T}{2}\right] \text{ ou } \mathcal{D}_f \cap \left[-\frac{T}{2}\,;\,0\right].$$

Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ paire et périodique de période 5.

De plus, f est strictement décroissante sur $[0,5\,;\,2]$ et $f(2) = 1$.

1) Tracer une courbe qui pourrait représenter f.
2) Démontrer que f est strictement croissante sur $[3\,;\,4,5]$.

II Fonctions sinus et cosinus

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,)$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

M est le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $(\,\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\,) \equiv x\ [2\pi]$.

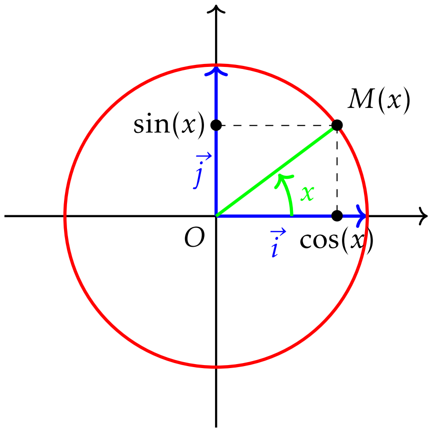
Définitions :

- On note $\cos(x)$ est l'abscisse du point M.

  La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.

- On note $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.

  La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.

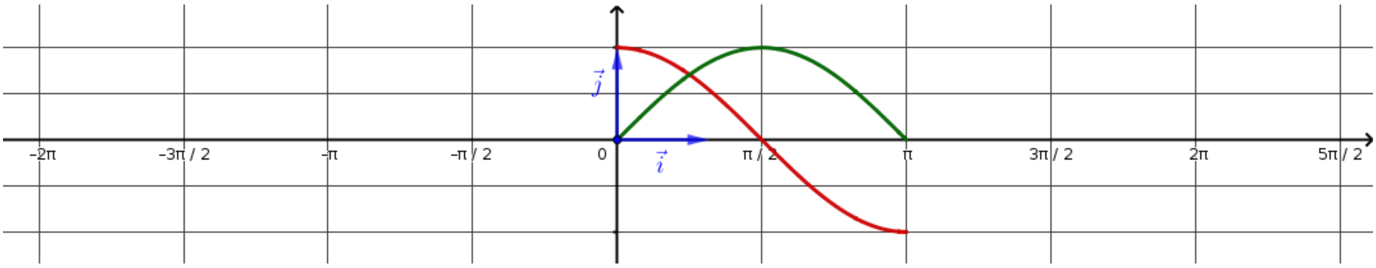


Propriétés : Parité et périodicité

- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction sinus est impaire.

Représentations graphiques :

Grâce à leur parité et périodicité, il suffit d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur $[0\,;\,\pi]$ pour en déduire leurs propriétés sur $\mathbb{R}$. Il en va de même pour leur courbe représentative.



Propriétés : Dérivation

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

Exercice 3 : Étudier la convexité des fonctions sinus et cosinus sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4 : Soit la fonction tangente définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?
2) Montrer que la fonction tangente est impaire et π-périodique.
3) Montrer que la fonction tangente est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\tan'(x)$.
4) En déduire un tableau de variation complet (limites comprises) de la fonction tangente sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
5) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction tangente et préciser ses asymptotes.

III Équations et inéquations trigonométriques

1) Valeurs particulières de sinus, cosinus et tangente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					
$\tan(x)$					

2) Équations trigonométriques

Propriété : Soit a et x deux nombres réels.

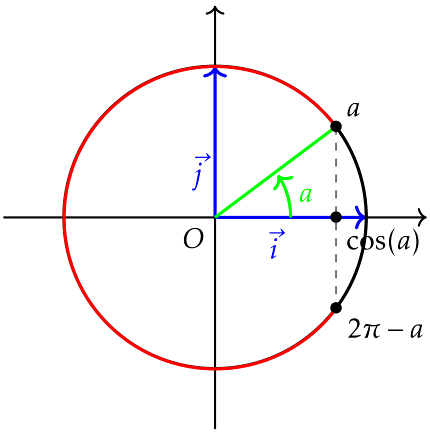
- $\cos(x) = \cos(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv -a\ [2\pi]$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x \equiv a\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a\ [2\pi]$

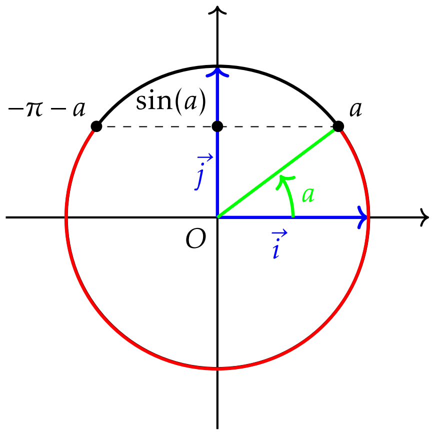
Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = -0,5$.

3) Inéquations trigonométriques

Propriété : Soit a et x deux nombres réels.

- $\cos(x) \leqslant \cos(a) \iff a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x) \leqslant \sin(a) \iff -\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$





Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(x) \leqslant -0,5$.