Variables aléatoires et concentration

I Combinaisons linéaires de variables aléatoires

Soit une expérience aléatoire dont Ω est l'univers fini des issues. P est la probabilité sur Ω.

Définition : (Rappel) Une variable aléatoire X définie sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

Exemple : On lance une pièce de monnaie. Si on obtient Pile, on gagne 5 € et on obtient Face, on perd 2 €.

La variable aléatoire X qui correspond au gain à ce jeu est définie sur l'univers $\Omega = \{\text{Pile} ; \text{Face}\}$.

$X(\text{Pile}) = 5$ et $X(\text{Face}) = -2$ donc $X(\Omega) = \{-2 ; 5\}$.

Définitions : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et deux réels a et b.

- $aX + bY$ est la variable aléatoire définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par $(aX + bY)(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$;
- $aX + bY$ est une combinaison linéaire des variables aléatoires X et Y ;
- La **somme** des variables aléatoires X et Y est obtenue pour $a = b = 1$;
- Le **produit** de la variable aléatoire X **par le réel** a est obtenu pour $b = 0$.

Exercice 1 : On lance, simultanément, un dé tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

X et Y sont les variables aléatoires correspondant respectivement au résultat du dé du dé tétraédrique et cubique. Soit la variable aléatoire $Z = 2X - Y$.

1) Déterminer les valeurs de la variable aléatoire Z ;
2) On considère les dés honnêtes, déterminer la loi de probabilité de Z.

Propriété : Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définie sur le même univers Ω et deux réels a et b.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Exercice 2 : On reprend la situation de l'exercice 1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et un réel a.

- Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$;
- $V(aX) = a^2 V(X)$;
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Exercice 3 : On reprend la situation de l'exercice 1.

1) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2) Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(Z)$.

II Application à la loi binomiale

Soit n un nombre entier naturel non nul et p un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Propriété : Soient n variables aléatoires X_1, X_2,... , X_n indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètre n et p.

CC-BY-NC-SA

Propriété : Réciproquement, si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété : Soit une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration 1

III Échantillon de n variables identiques et indépendantes

Soit n un nombre entier naturel non nul et n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un univers Ω et de même loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart-type σ.

Définitions :

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est la variable aléatoire somme des n variables aléatoires ;
- $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la variable aléatoire moyenne des n variables aléatoires.

Propriétés :

- $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = nV$ et $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$;
- $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \frac{V}{n}$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Démonstration 2

IV Concentration

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

Pour tout réel a strictement positif, $P(|X-\mu| \geqslant a) \leqslant \frac{V}{a^2}$ c'est à dire $P(X \notin]\mu - a\,;\,\mu + a[) \leqslant \frac{V}{a^2}$

Corollaire : $P(|X-\mu| < a) \geqslant 1 - \frac{V}{a^2}$ c'est à dire $P(X \in]\mu - a\,;\,\mu + a[) \geqslant \frac{V}{a^2}$

Propriété : Inégalité de concentration

Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un univers Ω, de même loi de probabilité, d'espérance μ, de variance V et M_n la variable aléatoire moyenne des n variables aléatoires.

Pour tout réel a strictement positif, $P(|M_n - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{V}{na^2}$.

Propriété : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω, de même loi de probabilité, d'espérance μ, de variance V et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n la variable aléatoire moyenne des n variables aléatoires.

Pour tout réel a strictement positif, $\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant a) = 0$.

CC-BY-NC-SA