

Questions préliminaires

On considère la fonction f définie sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$

et la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Question A

Étudier les variations de f sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

Question B

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

Question C

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.