

Questions préliminaires

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$,

On admet que f est dérivable sur $[0 ; 1]$.

Question A

Étudier les variations de f sur $[0 ; 1]$.

En déduire que, si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Question B

On définit alors la suite (u_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Question C

Calculer la valeur exacte de la limite de la suite (u_n) .